Polynomapproximation av sinus

I denna laboration ska du studera hur det är möjligt att approximera funktionen $y = \sin x$ med en polynomfunktion.

I bilden intill ser du ett Graphs & Geometry fönster med de båda funktionerna $f1(x) = \sin x$ och $f2(x) = x$ ritade. I en omgivning till origo kan man säga att $\sin x \approx x$ och felet beror, som framgår av graferna, på hur stort värde på x som används.

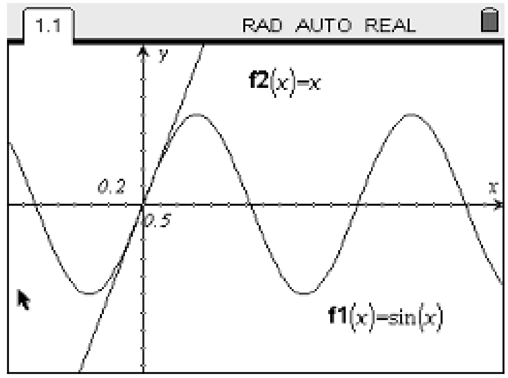
Hur stor är avvikelsen då $x = \dfrac{\pi}{6}$ dvs 30°?

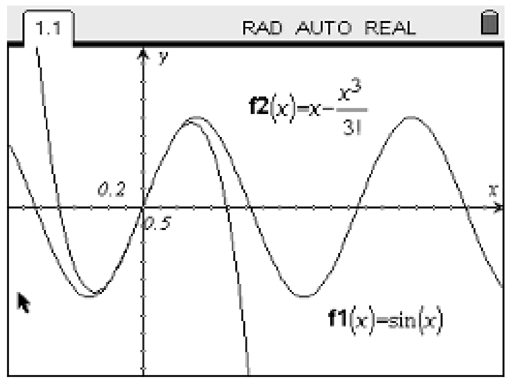
I laborationen ska du efterhand lägga till flera termer i polynomet för att förbättra approximationen och för att utvidga den till större x-värden. Det som du kommer att göra kallas för en Taylorutveckling av funktionen $\sin x$.

I bilden har *f2(x)* redigerats. Ytterligare en term i Taylorutvecklingen är tillfogad.

Hur stor är nu avvikelsen då $x = \dfrac{\pi}{6}$?

Hur stor är avvikelsen då $x = \dfrac{\pi}{3}$ dvs 60°?





Ytterligare uppgifter

- Utför efterhand följande förändringar av funktionen f2(x) och studera vad som händer med approximationen: $f2(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$ sedan $f2(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ och därefter $f2(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$
- Hur god är den sista approximationen ovan för $x = \pi$?
- Tillfoga efterhand flera termer enligt ovanstående mönster och undersök hur många termer du måste ta med för att få en approximation i hela intervallet $-2\pi \le x \le 2\pi$ som är bättre än 0,001.

Extrauppgift

Försök fundera ut hur du med hjälp av ovanstående kan studera en polynomutveckling av funktionen $y = \cos x$. Hur ser utvecklingen ut? Studera på motsvarande sätt som ovan approximationens giltighet.

Läraranvisning

Matematisk nivå

Kunskaper motsvarande matematik kurs D och inledande högskole- och universitetskurser.

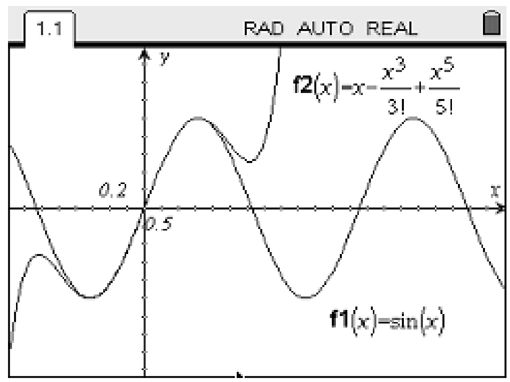
Teknisk nivå

Tidigare erfarenhet av TI-Nspire är nödvändig.

Några steg:

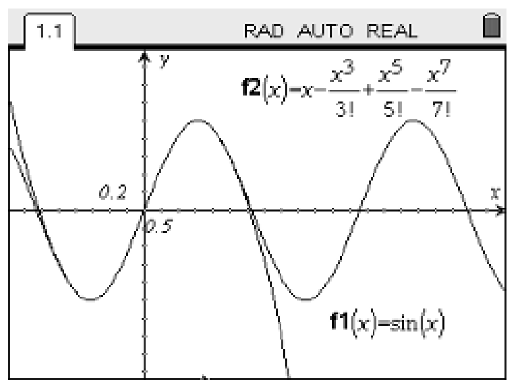
Skärmbilderna intill visar några av de påföljande stegen.

Som framgår ger redan sjundegrads-polynomet en hyfsad approximation i hela intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$.



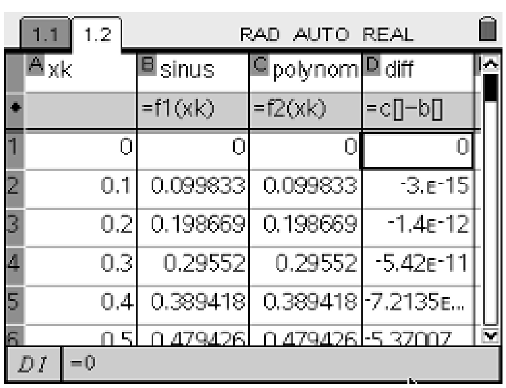
Det kan vara lämpligt att infoga en Lists & Spreadsheet-applikation för att jämföra funktionsvärdena för funktionerna *f1(x)* och *f2(x)*. Bilderna nedan visar exempel på hur detta kan genomföras.

Först genereras i kolumn A en serie med x-koordinater i steg om 0,1. Sedan studeras i kolumnerna B och C funktionsvärdena för funktionerna genom att infoga lämpliga uttryck i formel-cellerna.



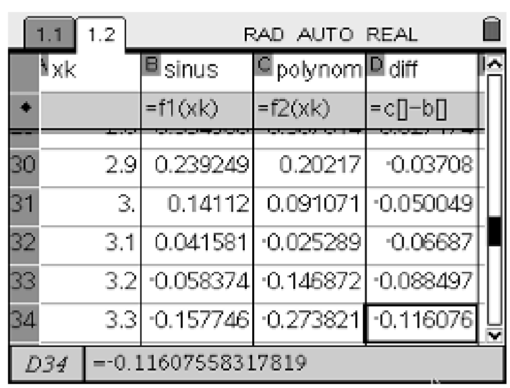
Slutligen bildas i kolumn D differensen mellan de båda kolumnenra för att snabbt få en överblick över avvikelserna.

Se nedan!



	A xk	B sinus	C polynom	D diff
◆		=f1(xk)	=f2(xk)	=c[]−b[]
1	0	0	0	0
2	0.1	0.099833	0.099833	-3.E-15
3	0.2	0.198669	0.198669	-1.4E-12
4	0.3	0.29552	0.29552	-5.42E-11
5	0.4	0.389418	0.389418	-7.2135E...
6	0.5	0.479426	0.479426	-5.37007

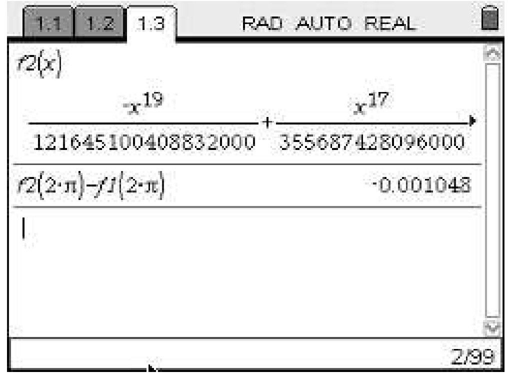
D1 =0



	A xk	B sinus	C polynom	D diff
◆		=f1(xk)	=f2(xk)	=c[]−b[]
30	2.9	0.239249	0.20217	-0.03708
31	3.	0.14112	0.091071	-0.050049
32	3.1	0.041581	-0.025289	-0.06687
33	3.2	-0.058374	-0.146872	-0.088497
34	3.3	-0.157746	-0.273821	-0.116076

D34 =-0.11607558317819

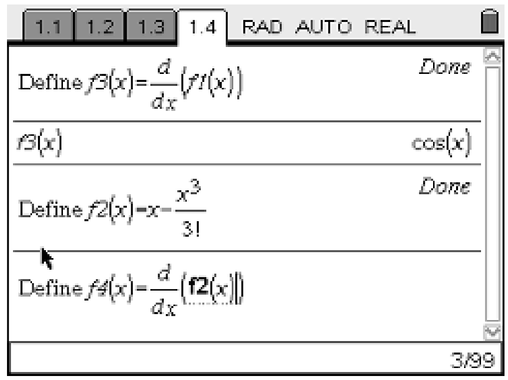
För att nå önskad noggrannhet hos approximationen i hela intervallet $-2\pi \le x \le 2\pi$ behövs det termer i utvecklingen upp till och med grad nitton. Detta framgår i bilden till höger där de båda funktionerna är jämförda i en Calculator-applikation.

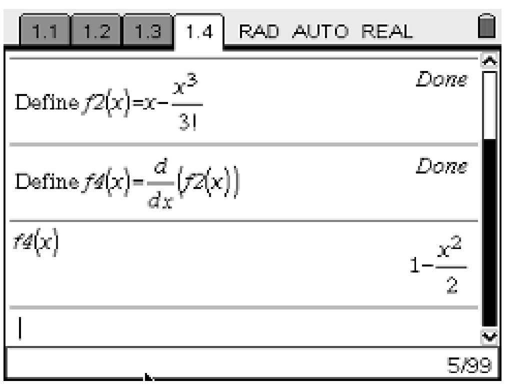


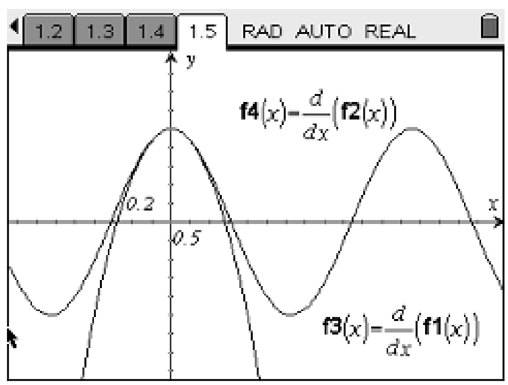
Extrauppgift

Eftersom $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ kan vi skapa en polynomapproximation för $\cos x$ genom att derivera de båda leden i ovanstående ”ekvation”. För att genomföra detta i steg definieras *f3(x)* och *f4(x)* så som bilderna intill visar.

För att bygga upp övningen från början så omdefinieras *f2(x)* först innan *f4(x)* definieras.

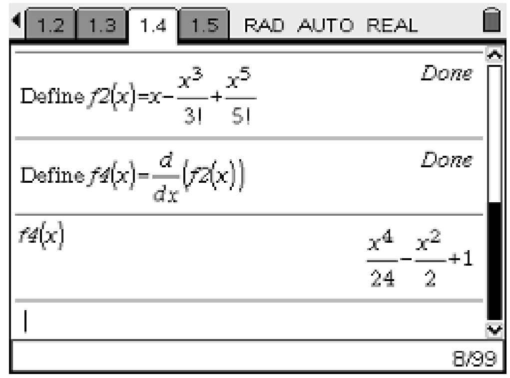


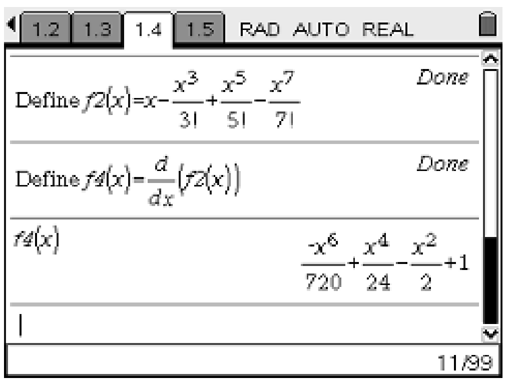


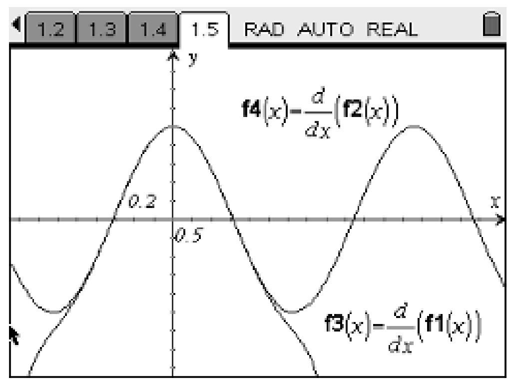


Antalet termer utökas efterhand och överensstämmelsen studeras. På så sätt kan eleven finna strukturen i utvecklingen av $\cos x$.

Intill finns fjärdegradspolynomet och nedan sjättegradspolynomet tillsammans med grafen av detta. Att utvecklingen har utseendet $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ framgår, och inses också av derivationen.







Så studerar vi slutligen då *f2(x)* är av nittonde graden så som övningen med sinus avslutades tidigare. Resultaten för artongradspolynomet för cosinus framgår av bilderna nedan.