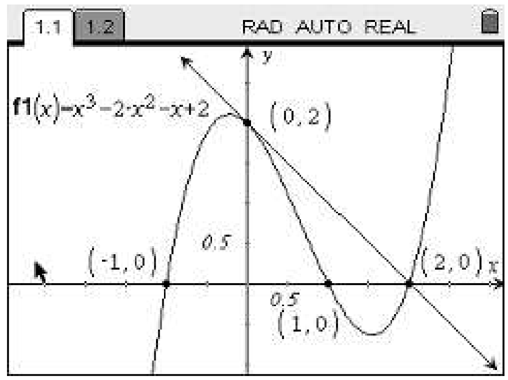
Tangenter till tredjegradsfunktioner

I bilden intill ser du grafen av en tredjegradsfunktion som har tre nollställen nämligen x = 2, x = 1 och x = -1.

Om man ritar en tangent till funktionsgrafen kommer den i allmänhet att skära x-axeln. För vissa tangeringspunkter kommer tangenten att skära x-axeln i ett av nollställena. Finns det något mönster för när detta inträffar? Undersök detta!

Starta med den funktion som du ser avbildad i figuren intill. Definiera andra tredjegradsfunktioner som har tre nollställen och undersök om samma sak gäller för dem. Är det du observerat generellt? Bevisa dina iakttagelser algebraiskt!



Grafen av $f1(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 2$

Några steg på vägen

- Observera först i bilden ovan tangeringspunktens koordinater och koordinaterna för skäringspunkten med x-axeln.
- Börja sedan din egen undersökning genom att definiera ovanstående funktion. Placera en punkt på grafen (b, Points & Lines, Point On) och redigera dess x-koordinat genom att klicka på den. Ändra dess värde till x=0. Rita en tangent till grafeni denna punkt (b, Points & Lines, Tangent).
- Dra tangeringspunkten utmed grafen tills det inträffar en ny skärningspunkt mellan tangenten och x-axeln i ett nollställe. Eventuellt behöver du skriva in x-koordinaten som ovan.
- När du tycker du har funnit ett mönster för när detta sker bör du definiera en ny tredjegradsfunktion, för att se om det du upptäckt gäller mera generellt. Enklast redigerar du den befintliga funktionen. Se gärna till, att du har heltalsvärden på nollställena. Tänk efter hur du bör definiera din funktion för att göra det på enklast möjliga sätt.
- Bevisa slutligen dina observationer algebraiskt genom att infoga en Calculator-sida där du definierar en generell tredjegradsfunktion som har tre nollställen.

Extra

Undersök om en generell tredjegradsfunktion, dvs. en som inte nödvändigtvis har tre nollställen uppvisar ett likartat beteende med en linje som skär grafen i tre punkter.

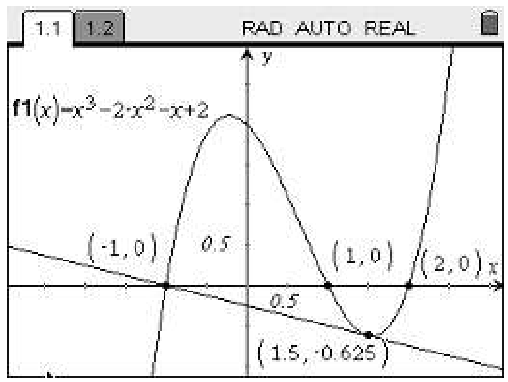
Matematisk nivå

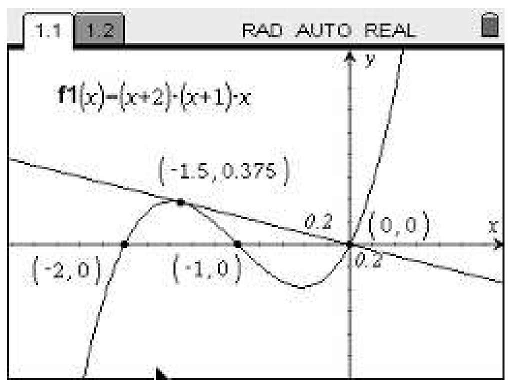
Kunskaper motsvarande matematik kurs C.

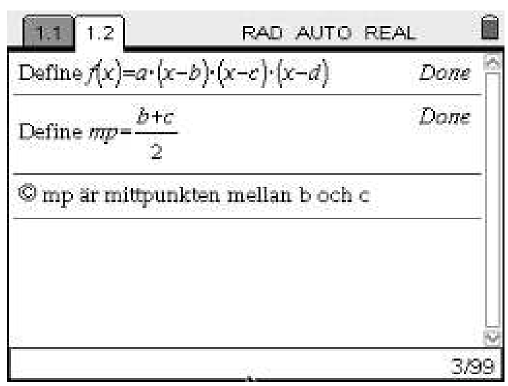
Teknisk nivå

Tidigare erfarenhet av TI-Nspire är nödvändig.

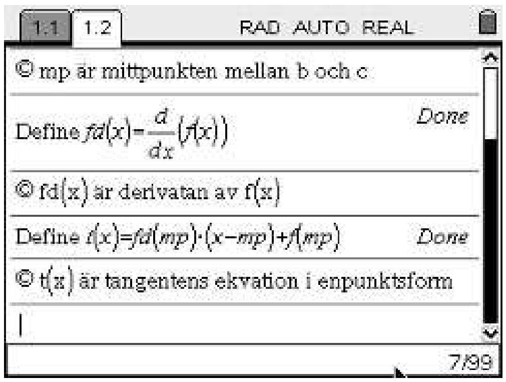
Läraranvisning:

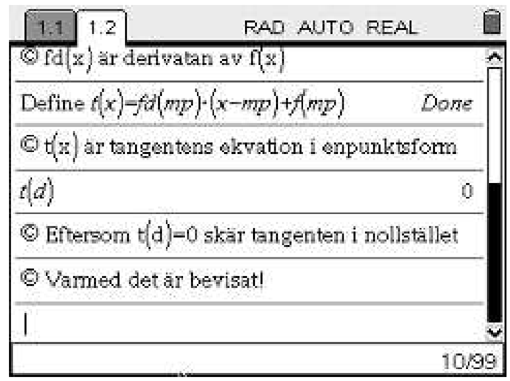
<table>
<tr>
<td>
Undersökningen bör leda fram till, att då en tangent ritas i en punkt på grafen vars x-koordinat är medelvärdet av två av nollställena, så skär tangenten x-axeln i det tredje nollstället. Bilden intill illustrerar ytterligare ett sådant tillfälle.
För att definiera en annan funktion visas inmatningsraden om den inte är synlig (b,View, Show Entry Line). Därefter definieras funktionen i faktoruppdelad form.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
I bilden visas en annan funktion f1(x) med en tangent ritad så som beskrivits ovan. Genom att flytta till de övriga båda lägena kan eleverna övertyga sig om att det, som de tidigare observerat, fort-farande gäller.
Det verkar med andra ord troligt att observationen gäller generellt. Det återstår att bevisa detta.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Det är viktigt att diskutera en strategi med eleverna, dvs. vad som behövs för att kunna bestämma skärningspunkterna mellan tangenten och x-axeln.
När planeringen är klar är det dags att ínfoga en Calculator-sida (c, Calculator) och definiera ett generellt tredjegradspolynom med tre nollställen som $f(x)=a\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot(x-d)$. Detta kan ske med b, Actions, Define.
Lämpliga steg i beviset visas i skärm-bilderna till höger och på följande sida.
</td>
<td>


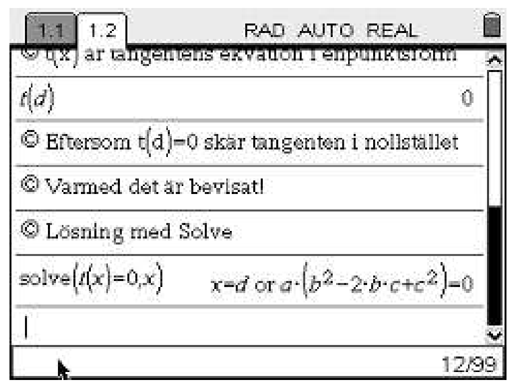
</td>
</tr>
</table>





Det är naturligtvis också bra att lösa ekvationen $t(x) = 0$ för att visa vilken eller vilka lösningar som kan uppkomma.

Detta visas i bilden intill. Diskutera med eleverna vad den andra lösningen betyder.



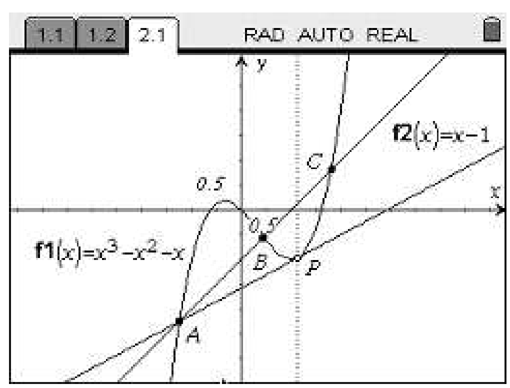
Extrauppgift

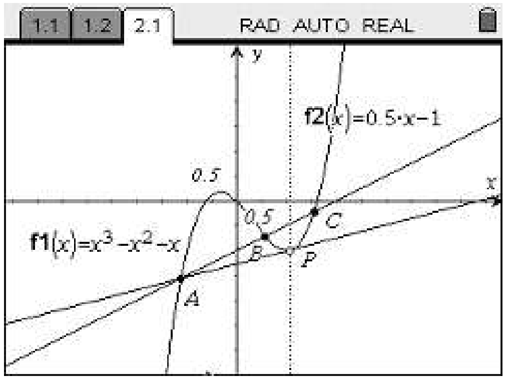
Extrauppgiften illustreras i Graphs & Geometry. Beviset för det hela överlåtes åt den intresserade.

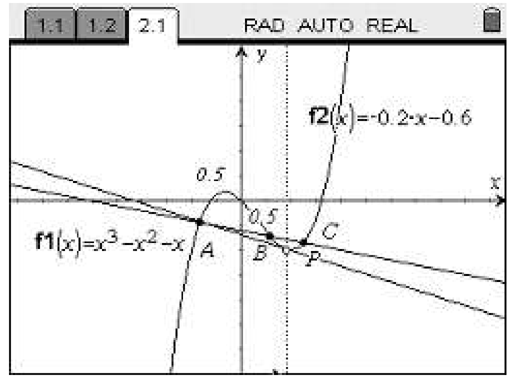
Som framgår av bilden till höger kommer tangenten i punkten P som är belägen mitt emellan B och C i x-led, att skära kurvan i punkten A.

Om linjen vrids kommer fortfarande ovanstående att gälla vilket framgår av bilderna på nästa sida.

Med andra ord tycks det rimligt att den uppställda hypotesen är giltig.




1.1 1.2 2.1 RAD AUTO REAL
y
x
f2(x)=0.5·x−1
0.5
0.5
f1(x)=x3−x2−x
A
B
C
P


1.1 1.2 2.1 RAD AUTO REAL
y
x
f2(x)=-0.2·x−0.6
0.5
0.5
f1(x)=x3−x2−x
A
B
C
P