

利用信息技术开展数学实验的初步探究

北京市十一学校, 侯立伟

摘要:

本文主要探讨了通过信息技术为学生提供“多元联系表示”的学习环境。通过选取三个有代表性的案例,初步展示了信息技术在数学课程中发挥的作用。文中提供的信息技术软件分别是 mathematicshs, 几何画板, 和美国德州仪器的 TI 图形计算器。力图从不同的角度, 使用不同的技术来实现与数学课程的整合。在案例教学的过程中, 通过信息技术为学生提供“多元联系表示”的学习环境。把学习的内容, 以组合的或动态的方式灵活地向学生提供图、表、文字或符号等各种表示方法, 从而创设一种具有挑战性的学习情境。另外特别是在数学概念的教学过程中, 在信息技术支持下, 通过提供图形 (graph), 符号的 (symbol), 表格 (table) 等形式的表示, 使学生从不同角度加深对概念的理解和掌握。

关键词: 课程整合, 级数, 收敛, 算法

一 理论思考

(一) 工欲善其事, 必先利其器。信息技术的发展已经深刻的改变了数学世界, 它可以把数学家头脑中的“数学实验”变成现实。精深的数学概念、过程可以得到模拟, 再难的计算、在复杂的方程, 只要给出算法就能解决, 复杂多变的几何关系, 利用计算机动态的作图功能可以得到表示。信息技术提供的外部刺激是多样的、综合的、既可看见, 又能听见, 还可以动手操作。这样, 学生在学的过程中就可以调动多种感官协同作用, 这对数学知识的获取和保持具有重要的意义, 也是数学学习方式的转变的具体体现。总之, 信息技术为学生提供的交互式学习环境中, 实验、探究、发现等将成为重要的学习方式, 学生可以按照自己的认知基础、学习兴趣来选择学习内容, 这就为学生的主动性、积极性的发挥创造了条件, 使学生的主体性得到充分体现。

新技术出现之后, 数学教学从“传授知识”的传统模式转变到“以激励学习为特征的, 以学生为中心”的实践模式, 由学生被动听讲的课堂变成学生积极主动参与的像下面这样的学习环境: 鼓励学生去探索; 帮助学生表达自己的数学思想; 让学生看到许多数学问题不只一个正确答案; 提供证据, 证明数学是生动的, 激动人心的; 使学生体验到深入理解和严格推理的重要性; 使所有学生都建立起能够学好数学的自信心。

(二) 信息技术是可以为学生提供“多元联系表示” (multiple linked expression) 的学习环境。

在信息技术环境中，“多元联系表示”能得到充分发挥，重要原因是计算机使得功能强大的图形表示法成为可能，从而使抽象的符号、复杂而零散的数据得到直观表示，而且还可以对数学对象直接进行操作（如局部放大、变换研究对象的空间排列位置、重复引起变化的关键因素、动态显示等），从而对其细节进行观察，这就会使学生发现数学对象不同方面的内在联系的机会大大增加，并为理解其本质特征奠定坚实基础。“多元联系表示”对于学生理解数学有重要影响，其实质是对同一数学对象（数学的概念、法则、表达式、定义等等）给出几种不同表示，从而使数学对象不同方面的特征得到显示。

在这样的环境中，学生可以在教师的引导下，在把握数学对象不同方面特征的基础上，将不同表示法中蕴含的信息组合起来，这就大大增加了建立数学对象不同方面联系性并把握数学对象本质特征的可能性。在信息技术的支持下，数学知识的多样化表达方式可以极大地拓展数学学习空间，有力地支持学生的学和教师的教，使高水平的、深层次的数学思维活动获得有力的支持，使学生自主探究式学习成为可能并得到落实，并能有效地激发学生的数学学习兴趣，使学生学得更加生动活泼、更加富有成效。

案例 1：进行数学实验 研究调和级数与欧拉常数

定义：称 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 为调和数列。记 $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ 为调和级数。

设计过程：

第一步：从三个角度来研究调和级数 $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

算法(arithmetic)，数据表(data table)，图象 (graph)

(1) **算法语言实现(arithmetic)**：信息技术的发展将影响到学生数学学习的方式。例如学生应当更加关注对算理的理解，更加强调对算法的设计，通过编制计算机程序，来研究如何计算调和数列的前 n 项和。以此来了解数学中“算法”的重要作用和在解决问题中的作用。

下面借助于计算机程序的算法。

程序清单：（在 BASIC 中调试通过）

S=1	//此行为付初值，计算第 1 项的值//
Input "N=",N	//此行为输入 N 值，以计算前 N 项的值//
For N=2 to N	Step 1



S=S+1/N	//计算前 N 的循环结构//
Next N	
Print "S"=,S	//输出结果//
End	//程序结束//

(2) 数据列表 (data table) 下面是计算出的部分 S_n 的值

学生的数学能力应该要求达到能够辨明关系、逻辑推理，并能运用各种数学方法去解决广泛的、多种多样的非常规问题，能够正确、自信和恰当地使用计算器；会估计数量级以确认心算或计算器计算的结果；会使用表、图、电子数据表 (Spreadsheet) 和统计技术去组织、解释和表示数值信息；能判断所提供的数据的可靠性；会使用计算机软件去完成数学任务；能从模糊的实际课题中去形成一些特别的问题，形成选择有效解决问题的策略。

n	S_n	n	S_n
1000	7.48547086	6000	9.276813744
2000	8.178368103	7000	9.43095252
3000	8.58374989	8000	9.564474984
4000	8.8713903	9000	9.682251076
5000	9.088530945	10000	9.787606036

(3) 图像研究 (graph) :

信息技术还可以为学生提供一种图文并茂、丰富多彩、人机交互、及时反馈的学习环境，在这样的环境中，学生可以利用信息技术模拟现实情景，自己构建数学内外问题的模型，进行数学探究、数学应用、数学交流等实践，这在传统的数学学习中是较难实现的。信息技术提供的外部刺激是多样的、综合的、既可看见，又能听见，还可以动手操作。这样，学生在学的过程中就可以调动多种感官协同作用，这对数学知识的获取和保持具有重要的意义，也是数学学习方式的转变的具体体现。

根据数据表格，作出 S_n 与 n 的关系的图像。 n 为横轴， S_n 为纵轴

(以下语法结构为 mathematics 中的程序结构语言。)

```
H[n_] := NSum[1/k, {k, 1, n}];
t = Table[{n, H[n]}, {n, 1, 1000}];
ph1 = ListPlot[t]
ph2 = Plot[Log[x], {x, 1, 100}]
```

图像图 1，可以通过观察描出的图像的性质来研究 S_n 与 n 的关系。

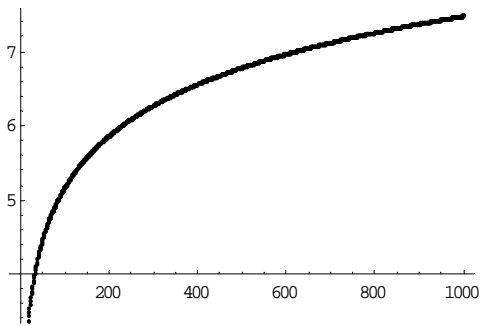


图 1

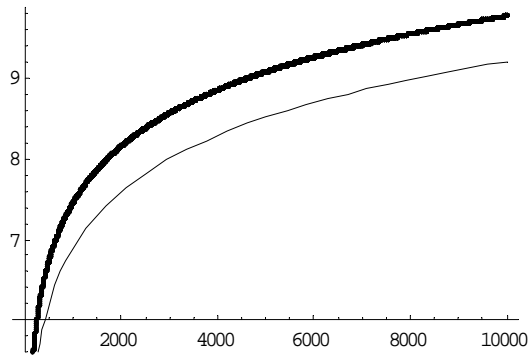


图 2

由图 1 可以看出， S_n 的图像类似于对数函数的图像，因此下一步可以在同一个坐标系中画出两者的图像。

第二步：研究调和级数 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 的性质

(1) 研究 S_n 与 $\ln x$ 图像的形状与对数函数 $y = \ln x$ 是否相似？

下面在同一个坐标系中画出两者的图像。

(以下语法结构为 mathematics 中的程序结构语言)

```
H[n_] := NSum[1/k, {k, 1, n}];
t = Table[{n, H[n]}, {n, 1, 1000}];
ph1 = ListPlot[t]
ph2 = Plot[Log[x], {x, 1, 1000}]
Show[ph1, ph2]
```

两者图像如图 2。

由此可以看出，当 n 很大时，

S_n 与 $y = \ln x$ 的图像非常接近，所以 S_n 与 $y = \ln x$ 大致相差一个常数 C 。

常数 C 的近似值为 $C = S(1000) - \ln(1000) \approx 0.5777155813$ 。

这个常数 C 称为欧拉常数。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = C$ (欧拉常数)

(注：以上图像和数据的采集是借助于 mathematics 软件完成)

(4) 研究 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ 是否存在？

关于这一点需要学生课下查阅有关书籍来解决实现

到此为止，学生便完成了初步的数学实验，回顾研究的过程可以看出，利用信息技术，即使具有初等知识的学生同样可以把数学研究进行得很深入。这其中，信息技术起了决定性的作用。

案例 2 探究发现数学规律

现代信息技术应用于教学的过程中，打破了传统的教学模式的束缚，为学生进行建构性的学习提供了有利的条件。现代教育技术

的恰当使用,可以为学习者提供丰富,生动的学习资源.计算机和计算器等技术还可以成为学习者发现知识,探究知识和表达观点的有力工具.数学建构观认为,数学学习不是一个被动吸收的过程,而是以原有的知识和经验为背景的建构的过程.学生学习数学知识,相对于数学家来说,是一个再创造的过程,在创设一定的情境下,学生通过探索、发现、猜想、论证,经历一个由外因向内因转化的建构过程,他获得的数学知识是深刻而久远的.下面是一个利用计算器进行探究的一个案例

课题:研究参数 a 对极坐标方程 $\rho = 2 \cdot \sin(a \cdot \theta)$ 图像的影响

在研究极坐标方程 $\rho = 2 \cdot \sin(a \cdot \theta)$ 中参数 a 的变化对参数方程图形的影响.

(工具:TI 图形计算器)

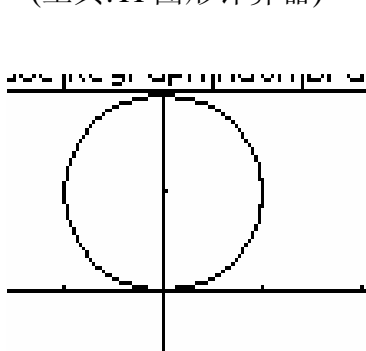


图 3

$a=1$ 时,图形如图 3

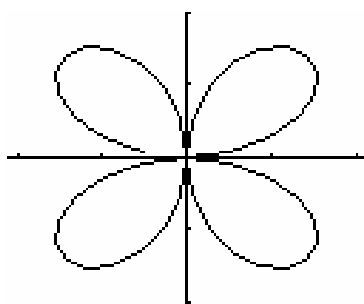


图 4

$a=2$ 时,图形如图 4

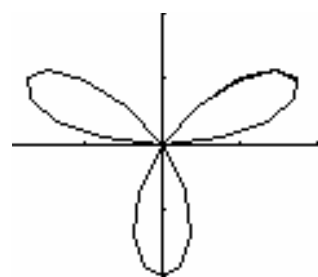


图 5

$a=3$ 时,图形如图 5

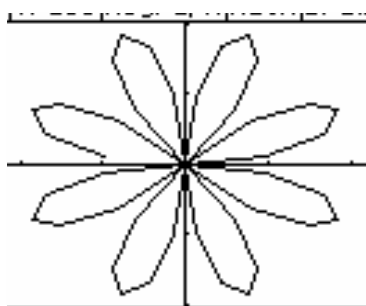


图 6

$a=4$ 时,图形如图 6

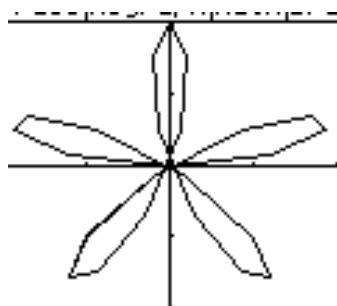


图 7

$a=5$ 时,图形如图 7

学生在研究极坐标方程 $\rho = 2 \cdot \sin(a \cdot \theta)$ 的图象时,在 TI 图形计算器中输入不同

的表达式,通过观察图形,总结规律如下 :

以极点为中心,图形为“花瓣”形。

不同的是“花瓣”朵数不同.规律如下

当 a 为奇数即, $a=2n+1, n \in \mathbb{N}$ 时, “花瓣”朵数为 $2n+1$

当 a 为偶数即, $a=2n, n \in \mathbb{N}$ 时, “花瓣”朵数为 $2n$

以上研究的是当 a 取整数时, 图形的规律

如果 a 取值为非整数的有理数时, 图形的形状有何规律呢?

学生利用 TI 图形计算器输入 a 的不同值, 观察规律。

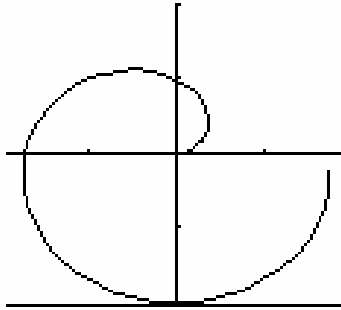


图 8

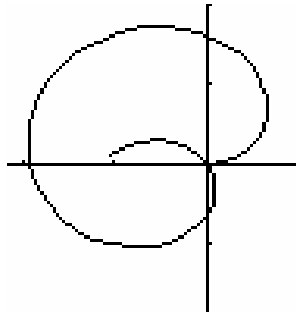


图 9

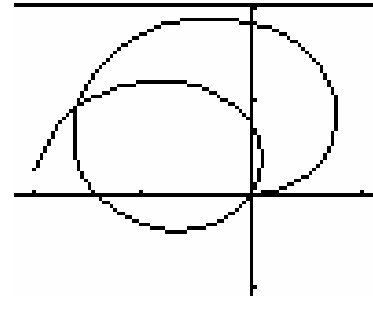


图 10

$a = \frac{1}{3}$ 时, 图形如图 8,

$a = \frac{3}{5}$ 时, 图形如图 9

$a = \frac{3}{4}$ 时, 图形如图 10

通过这个研究的案例可以发现, 学生在玩的过程中, 就可以发现数学规律, 随时随地进行研究。通过观察实验, 来探索数学知识。

案例 3: 数学建模活动

确定身高与体重的函数关系

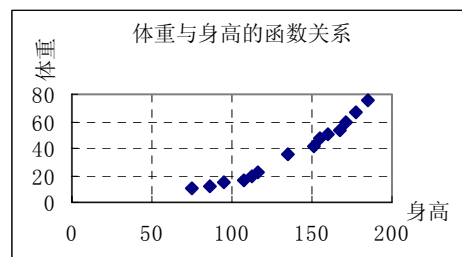
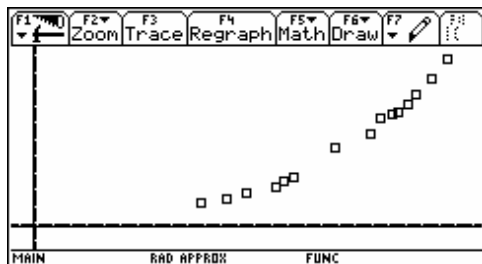
第一步; 测量数据: 得到测量的数据: 身高单位: cm; 体重: kg

身 高	75	86	95	108	112	116	135	151	155	160	167	171	178	185
体 重	10	12	15	17	20	22	35	41	48	51	54	59	66	75

以上表格中的数据是恰当的, 体现了样本数据的收集原则, 要有代表性, 所选取的数据应该是能够反映数据的变化规律和特点。

绘出的图像为:

根据坐标系内点的情况, 可以选择一次线性函数和立方函数来拟合, 结果分别



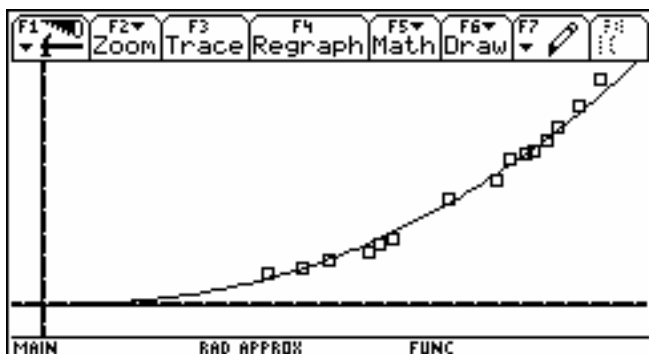
为如下表

函数的模型为： $y = a \cdot x^b$

其中： $a = 4.007 \times 10^{-4}$, $b = 2.311$

为幂函数型：

图像为：



模型的讨论：误差分析

身高	75	86	95	108	112	116	135	151	155	160	167	171	178	185
体重	10	12	15	17	20	22	35	41	48	51	54	59	66	75
理论值	8.6	11.8	14.9	20.0	21.8	23.6	33.6	43.5	46.2	49.7	54.9	58.0	63.6	69.5
差值	1.4	0.2	0.1	-3.0	-1.8	-1.6	1.4	-2.5	1.8	1.3	-0.9	1.0	2.4	5.5

可以看出得到的函数的模型与实际的情况误差不大。

引导学生讨论：

- (1) 对于给出的样本数据是否具有代表性？
- (2) 如何选择一个合适的函数模型？是否还有别的函数模型？
- (3) 对于不同的函数模型，如何给出评价的标准？
- (4) 最后的结论如何？
- (5) 是否还有别的建模的方法，由前面的第一个问题是否能给我们一些启示？
- (6) 对于(5)中的函数模型如何评价？

参考文献

《课程教材研究所〈高中数学课程教材与信息技术整合的研究〉思考》章建跃
《高等数学实验》高等教育出版社，施普林格出版社