

中学数学实验（课）设计范式及其主体认识分析

首都师范大学附属中学 常丽艳 (100037)

摘要：信息技术介入中学数学教育以来，对数学实验理论和实践的探索成为新课程建设的研究热点。本文以数学实验（课）的教育辅助功能为基点，将大量课例在教学一线实践检验、归纳概括，从中求同存异、优化总结出验证式、模拟实验式、观察理解式、探索建构式四种常规的教学设计范式，并从主体活动的认识论特征来谈实验设计的方法论意义。

关键词：数学实验；教学设计范式；主体认识作用；方法意义

1 中学数学实验的含义

根据现代技术支持下的数学实验的本质特征——借助一定的物质工具，在数学化思维的指导下，通过实际操作解决问题、获得知识的数学实践，来如下定义本文后述内容所言的基础。

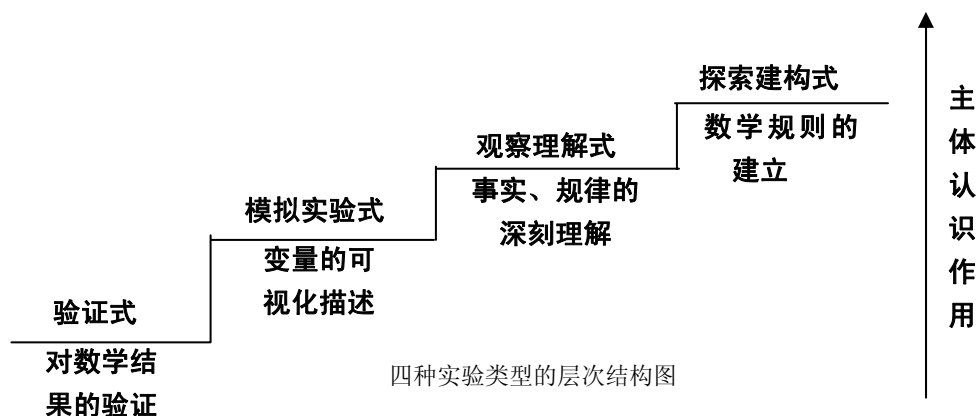
中学数学实验是根据教学内容的需要，人为地、有目的地、模拟地创设一些有利于观察的数学对象，在典型的实验环境中或特定的实验条件下，经过某种预先的组织、设计，让学生借助于一定的物质仪器或技术手段，并在数学思想和数学理论的指导下，对实验素材进行数学化的操作，来学（理解）数学、用（解释）数学或做（建构）数学的一类数学学习活动。

中学数学实验以动手实践为基点，具备三个必要成分：（1）实验应有主体的动手操作；（2）实验的物质仪器或技术工具能够数学化地描述实验对象；（3）实验的物质工具应被实验主体有目的的使用。从实验结果的角度来看，它又具备三个特征，一是实证性，即能提供确定的数学知识，结论明确，（理论上）可以验证；二是深刻性，能在实践的基础上进行抽象思维，进而揭示数学规律或问题解决的本质；三是创造性，在技术中介的参与下扩大主体的认识能力，进行“发现”或“再发现”。

以上对中学数学实验的分析说明数学实验系统包括实验主体、数学知识以及物质仪器或技术工具。从认识论的高度来看，具备一定数学基础的学生是认识主体；认识的客体是进入学生认识和实践范围的客观数学知识；还有实现主体和客体相互作用的物质中介，如实验中所用的仪器和工具，符号语言等。根据皮亚杰的观点，认识起因于主客体之间的相互作用，而这种作用则是通过“活动来实现的”。数学实验就是学生在实践中运用技术中介与数学知识相互作用，从而能动地反映数学知识的过程。如果说在数学实验中有“一只无形的手”在指挥实验的方向和进程，那么这只手就是“实验设计”。教学设计可以促进主客体的这种作用，优化主体的“能动活动”，高效实现认识客体的目的。

2 中学数学实验的设计范式及主体认识分析

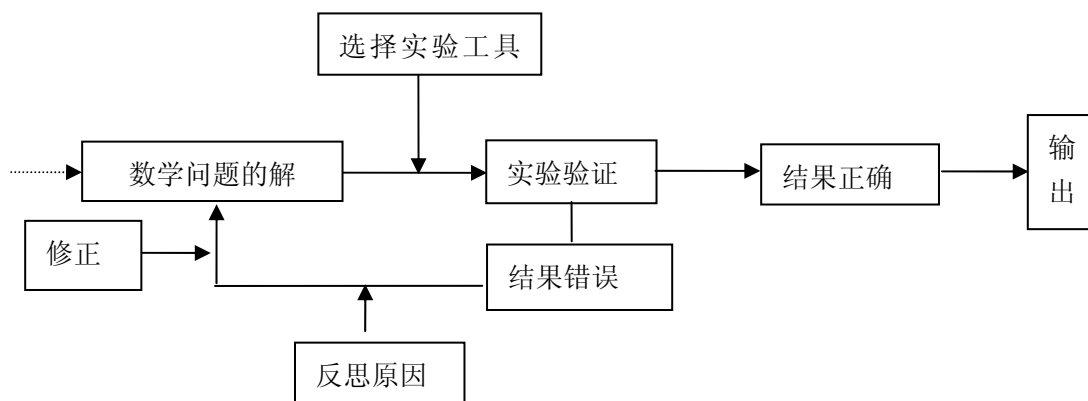
本文从数学实验教学设计角度出发，以实验任务为划分标准，将数学实验分为：验证式、模拟实验式、观察理解式、探索建构式四种类型。这四种类型的数学实验，学生的主观认识作用是不同的，呈顺次递增的特点：



2.1 “验证式”的数学实验设计

验证式的数学实验是让学生通过实验检测、验证已解结论或猜想的正确性的实验。这类数学实验作为一种常见的认识方式，把演绎与归纳结合于一身。实验设计者根据验证问题所需的实验工具，从激发学生学习兴趣和培养学生求真求实的理性精神出发，合理选择实验工具，使实验效果最优化。很多数学问题都可以采用实验的方法来验证判断和猜测。如对某些函数最值的验证、数式运算结果的验证、数学中量与质的规律等等。

其一般设计流程图如下：



验证式实验设计流程图

就操作活动本身而言，这类实验操作对主体的主观认识能力要求不高，无须主体对实验所呈现的结果去选择和判断。在这种实验类型中，实验主体的认识作用实际上是被缩小了的，实验结果不会以人的意志为转移，作为实验的中介，如数学模型、计算机（器）等的作用是被扩大化了的。也就是说，实验结果是不依赖于主体的主观认识而产生的。

验证性数学实验的方法论意义主要表现在以下几方面：一是可以得到良好的元认知能力培养，其核心是对自己思维和行为的自我监控；二是使思维的严密性受到考验，传统的

数学问题的解决只能在逻辑上加以确定，而在验证式的数学实验中，对答案的肯定与否定有了全新的方式；三是在先进技术手段的支持下，获取信息有了新途径。四是可以从实验验证的辅助信息中获得彻底弄清题目的手段；五是通过验证可以看出问题的本质，通过验证可以发现一些隐蔽的规律与性质——这是验证的深层作用。

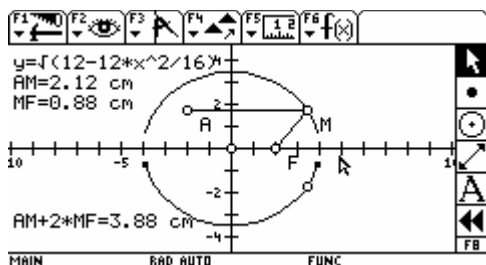
2.2 “模拟实验式”数学实验设计

数学中的变量，由于其动态的复杂性往往无法在静观或想象中完成对它的刻画，借助计算机的强大动态功能描述客观数学变化现象，从而对这种现象的某些规律做出预测和判断，这种数学实验通常成为“模拟式”的数学实验。

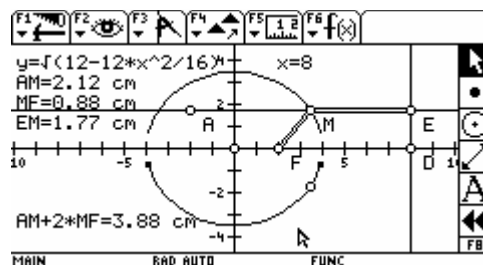
用 TI 图形计算器的几何画板功能，解决下面问题，并利用椭圆的相关知识证明你的结论。已知 $A(-2, \sqrt{3})$ ，F 是椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的右焦点，点 M 在椭圆上移动，当 $|MA| + 2|MF|$ 取最小值时，求 M 点的位置并证明之。

解决它最朴素的思想是：穷尽椭圆上所有的点，寻找最值。实验过程简述如下：

使学生学会相应软件的方程作图功能和测量功能，熟悉必要的操作。让学生自己实现绘图、取点、测算等步骤。观察实验数据，找到最小值时 M 点的位置及其特征（图 1）。在实验中也有些学生很快就发现了 $2|MF|$ 就等于点 M 到右准线的距离，加速了问题严密求解的思维过程。有些学生借助变化 A 点在椭圆内的位置，发现最值点 M 的共同特征，联想椭圆的第二定义（图 2）证明了这个结论，认识到了问题所反映出来的本质。



(1)

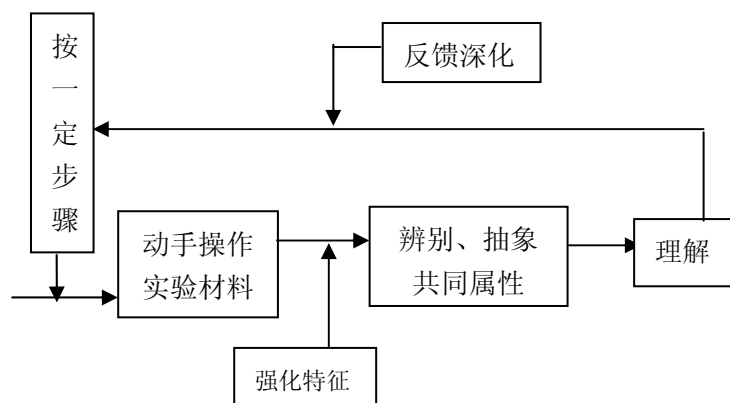


(2)

人的主观认识作用虽对这类实验的进程影响不大（因为最值点是显然的），但实验操作需对变量加以控制，只有主体参与才能实现这种控制，在技术手段的支持下，通过动态模拟加快了人的认识速度，缩短了认识进程。从这个意义上讲，人的认识作用较验证实验有所增长。另一个方面，被模拟的客体的“可视性”促成主体的深刻认识，通过物质中介，从量变上升到了质变，这也是对数学认识方法的一个重要启示。如果没有现代技术的帮助，解决这个问题似乎只能依赖经验了。由此看出模拟实验的方法论意义在于能突破现实的局限，抓住主要矛盾，在直观形象中地揭示对象的本质和规律，它可以大大简化和纯化数学对象，利于发现问题的实质。例如，可以通过计算机(器)产生大量的随机数，通过对频率的统计计算，画出随着大量重复实验的进行，频率值接近于一个稳定的常数，并且在它附近摆动的图象，来进一步认识概率这个概念。

2.3 “操作理解式”实验设计

操作理解式的数学实验通常是指在人为干预控制实验对象的条件下进行观察、测算、归纳等，并从中发现数学事实，以深刻理解数学概念原理等的实验。数学实验素材多取自



操作理解式实验设计流程图

基本数学概念和众多数学事实。实验工具材料也易于选取。具体设计流程如下图：

例如弧度制概念（课）实验设计方案：

- 1:分组准备 2~3 个不同大小的圆纸片，用线绳度量，剪出弧长与半径相等的扇形。
- 2:观察这些扇形，发现其圆心角都相等的事实，再利用量角器测出角的大小。
- 3:给出这样大小的角的定义，统一这些角为 1 弧度的角，使角的度量有了新“单位”，即用弧长是半径的几份来刻画角的大小。了解 1 弧度=57.30°。根据圆周长等于半径的 2π 倍，理解圆周角的大小为 2π 弧度,理解 $180^\circ = \pi$ 弧度,得出弧度制与角度制的换算公式。
- 4:根据自己的理解,剪出 $\frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$ 、 $\frac{3\pi}{4}$ 、 $\frac{5\pi}{6}$ 、 π 等弧度角，用量角器量出前几个角的角度制大小，利用弧度制的概念换算出后面的角的角度制大小，填写相应的表格。

这类设计本质上是为学生提供所要学的数学知识与已有的经验建立内部联结的实践机会。数学事实是客观的，可实践形式是主观的，所以这种实验进一步扩大了实验主体在认识过程中的作用，主要体现在认识主体选择、确定带有主观色彩的认识风格上。认识客体是学生主观选择的结果。这类数学实验的价值体现在它既能使经验材料经过数学抽象得以升华和结晶又可以让数学概念事实有了的现实经验背景，利于理解和记忆。

2.4 “探索建构式”实验设计

探索建构式的数学实验应当成为中学数学教学的主流实验。它既可以将验证性质的实验继续深入，又可将“操作理解”的效果移植到实验结论的应用上，也可以在模拟实验的基础上进一步探究，更可将三者有机融合不断创新。“探索建构”的是在认识上具有不同层次的数学知识。学生在探究问题的活动中不断完善和扩充实验结论。设计者通过对这类数学知识形成的背景分析，思考学生理解和建立数学规律的一般心理机制来实施设计。这种实验设计通常从某种数学原理出发，又回到这一数学原理。实验的最终目的是使学生在应用这个原理时，认识不同水平条件变化下的数学本质,真正意义上通过“探索”达到“建

构”数学认识结构的目的。

“简单高次不等式解法探索”可以设计成典型的这类数学实验课。它利用简单高次方程的各种变式和问题水平，经过经验的组合加工设计而成。其设计思路简介如下：借助启发性联想（解几个简单的二次不等式）、支持性联想（利用二次不等式的解法原理，借助工具解最简单高次不等式）设计问题控制实验进程；利用主体经验的局限性设置认知冲突和布置实践探索的层次和变式，最终使学生归纳整理出一般解法规律。整个实验过程所用到的实验技术是绘制函数图象和测点。）

从认识论的角度分析，这种数学实验强调主体在数学认识过程中的作用，认识主体的能力决定了使用物质中介活动的深度和广度，也就决定了认识客体的层次、结构和水平。实验中的观察、发现、归纳和猜想过程表明，实验主体的认识程度和正确的认识特征直接决定数学实验进程的快慢和成果的大小。这一点会弱化群体教学中的“从众”效应，扩大主体的主观认识作用。这类实验设计的重要意义就在于使学生在各种认识水平上得到收获，对学习结果没有唯一的标准。所选择的数学素材，应具有一定的层次结构，有体现特殊、一般的突出特征，有推广和变换下的数学不变性，应包含有能动的抽象，促进实验主体发现规律特征的愿望。因此，它在方法上能启迪认识主体形成假说、解释外推、开拓思维和触类旁通。

3 中学数学实验（课）设计的教育意义

以上四种实验设计范式是中学数学教学中常见的模式，对改革数学教学、建设新课程具有重要的意义。首先，数学实验的设计规划对设计者所假设的认识主体（学生）具有可操作性和实践性。实验教学特别注重实测与直观，让数学在“实验”的过程中对所研究的内容“可视化”，从中获得对数、形的观念，并逐步对其适度抽象，进行更高层次上的“再实验”，进而体会数学的研究方法和构成体系。其次，数学实验设计将教师对数学的主观经验赋予一定的客观形式，即借助于物质材料作为传递经验的媒体或信号，使学生在活动中认识并改造着自己的数学知识结构。还有，数学实验成为推动学生有效学习的强大力量，这是因为，学生学习数学的过程是建立在一定经验基础上的一个主动建构的过程。学生数学学习的过程本身充满了观察、实验、猜想、验证、推理与交流等丰富的数学活动，动手实践、自主探索、合作交流是学生学习数学的重要方式，这个过程应当是富有个性的、体现多样化学习需求的过程。因而，它的教育意义在当今培养创新人才的形式下是十分突出的。

这里有必要提及一下数学实验教学设计的最终目的——它使学生逐步学会数学思维的物质实践方法，掌握数学研究的规律，培养理性思考问题的习惯，能够解决学科的和实际生活的问题，并检验和论证问题的结果。这是新课标所倡导的数学素养和数学的人文价值所在！正如波利亚所指出的：“抽象的道理很重要，但要用一切办法使它们能看得见摸得着。”让它激励我们广大的数学教育工作者在数学实验设计这个领域不断探索和创新吧！

参考文献:

1. 郑毓信 《数学教育哲学》 四川教育出版社
2. 曹才翰 章建跃 《数学教育心理学》 北京师范大学出版社
3. 刘长华等编著 《数学新课程教学设计》 辽宁师范大学出版社
4. 刘邦奇 《数学实验方法及其哲学思考》《科学技术与辩证法》1994 第3期
5. 肖翠娥 《数学实验方法的分类及其本质特征》《益阳师专学报》1998年11月 第6期
6. 殷红 李忠海 《中学数学实验的教学模式探讨》《数学教育学报》2001年8月第3期
7. 孔令军 赵红革 《浅谈数学实验教学》《数学通报》
8. 王光生 《例谈中学数学实验课的功能》《中学数学教学参考》2001年9月第3期
9. 张君麟 《新技术支持下的数学教与学》《数学教育学报》2000年8月第3期
10. 王桂霞等 《关于数学实验课的一些探讨》《数学教育学报》2001年2月第1期
11. 张马彪 《对数学实验的探讨》《数学通报》2002年第7期