

图形计算器在解析几何学习和问题探究中作用

北京十四中 张敏 100053 yiyj1218@sina.com

摘要：随着时代的发展，信息技术已经渗透到数学教学中；借助新技术，我们不仅可以简化很多传统的数学计算更为重要的是我们有了更多的时间领悟原有的数学知识，并深入研究数学。作为信息技术时代产物的图形计算器有着强大的符号运算系统和图形运算系统，是一个高水准的数学平台，在这个平台上开展解析几何知识的学习和问题的探究可以使我们的视野更加开阔，本文主要阐述自己所进行的一些实践与体会。

现代信息技术的广泛应用正在对数学课程的内容、数学教学、数学学习等方面产生深刻的影响。信息技术在教学中的优势主要表现在：快捷的计算功能、丰富的图形呈现与制作功能、大量数据的处理功能；提供交互式的学习和研究环境等方面。因此，在教学中，应重视与现代信息技术的有机结合，恰当地使用现代信息技术，发挥现代信息技术的优势，帮助学生更好地认识和理解数学，增强学生对数学学习的兴趣，改善学生的学习方式。图形计算器是信息技术广泛应用的时代的产物，图形计算器兼有代数运算和图形的制作与度量两种功能，恰当地使用这两种功能有利于培养学生从数与形两个方面解决的问题能力；而中学数学中解析几何堪称“数形结合”的典范，因此我选择图形计算器在解析几何学习中的作用与问题探究为研究方向。

在解析几何中，首先是建立坐标系，取定两条相互垂直的、具有一定方向和度量单位的直线，叫做平面上的一个直角坐标系 oxy 。利用坐标系可以把平面内的点和一对实数 (x,y) 建立起一一对应的关系。除了直角坐标系外，还有斜坐标系、极坐标系、空间直角坐标系等等，在空间坐标系中还有球坐标和柱面坐标。坐标系将几何对象和数、几何关系和函数之间建立了密切的联系，这样就可以对空间形式的研究归结成比较成熟也容易驾驭的数量关系的研究了。用这种方法研究几何学，通常就叫做解析法。总的来说，解析几何运用坐标法可以解决两类基本问题：一类是满足给定条件点的轨迹，通过坐标系建立它的方程；另一类是通过方程的讨论，研究方程所表示的曲线性质。

坐标法使几何问题的解决变成了一些操作的步骤。运用坐标法解决问题的步骤是：首先在平面上建立坐标系，把已知点的轨迹的几何条件“翻译”成代数方程；然后运用代数工具对方程进行研究；最后把代数方程的性质用几何语言叙述，从而得到原先几何问题的答案。虽然解析几何的基本思想为我们解决问题提供了思路，但复杂关系中规律的探求和问题求解中，图形形状与大小的确定和代数运算往往使我们望而却步。而图形计算器不仅是我们能根据条件构造性地绘制出动点轨迹，而且能够使我们不再畏惧复杂的代数运算可以轻松地将我们解决问题的思路一步一步地加以实施。构造性地绘制出动点轨迹的过程，是对几何对象关系的分析与推理的过程；获得几何对象代数表达以及通过代数表达研究轨迹性质的过程是代数的推理过程。本文主要谈谈自己用图形计算器在解析几何中实施操作步骤和进行探究性学习的实践与体会。

一、图形计算器强大的代数运算系统，为用坐标法解决几何问题中的数式变形和解方程组提供了有力工具，为学生学好解析几何铺平了道路。

坐标法是借助坐标系，以代数中数与式的知识为基础来研究几何问题的一种数学方法。因此，学习这一学科时需要一定的代数知识作为基础，特别是对数式变形和解方程组的能力要求较高。而繁琐的代数运算是中学生普遍畏惧的内容，是中学生学习解析几何更好地理解坐标法的思想道路上的绊脚石。下面就以具体的案例，介绍图形计算器在几何对象代数化和代数转化过程中的作用。

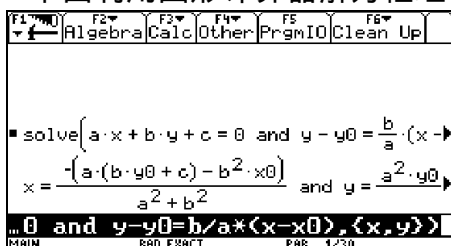
例 在中学数学教材中，点到直线的距离公式是一个基本公式，把这个几何量坐标化是一件非常重要的事情。如果给定的是具体的点和直线，则大多数同学都会想到：先求出过已知点且与已知直线垂直的直线，然后求出该直线与已知直线的交点，这个交点就是已知点在已知直线上的射影，由两点间距离公式就计算出了点到直线的距离。如果所给点不是具体的点和直线，上面的方法仍然适用，但复杂的代数符号运算让同学们停止了脚步。下面给出同学用图形计算器推导点到直线距离公式的过程：

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) ，直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0 (A \cdot B \neq 0)$ ，求点 P 到直线 l 的距离 d 。

求点 P 到直线 l 距离 d 的算法步骤为：

1. 求出直线 l 的斜率 k ， $k = -\frac{A}{B}$
2. 求出与 l 垂直的直线斜率 k' ， $k' = \frac{B}{A}$
3. 求出过点 P 且与直线垂直的直线 l' 的方程
当 $k' = \frac{B}{A}$ 时，直线 l' 的方程为 $y - y_0 = \frac{B}{A} (x - x_0)$ 。
4. 求出直线 l 与直线 l' 的交点 P' 的坐标

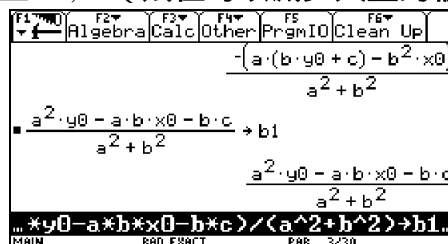
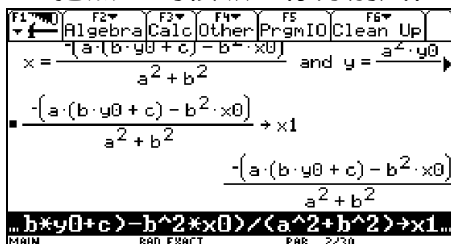
下面利用图形计算器解方程组



由此可以得到点 P' 的坐标为

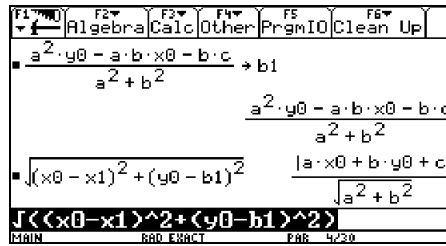
$$\left(\frac{-(A \cdot (B \cdot y_0 + C) - B^2 \cdot x_0)}{A^2 + B^2}, \frac{A^2 \cdot y_0 - A \cdot B \cdot x_0 - B \cdot C}{A^2 + B^2} \right)$$

5. 把点 P' 的横纵坐标分别赋值给变量 $x1, b1$ (赋值可以减少大量的输入)



6. 借助图形计算器利用下面的两点间距离的坐标公式计算可得

$$|PP'| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - b_1)^2}$$



由此可知点 P 到直线 l 距离为

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

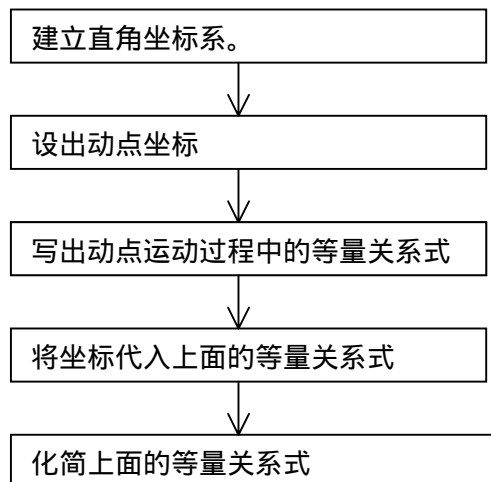
到这里，再提问同学：如果 $A \cdot B = 0$ 时，情况是怎么样的呢？你还有别的解法吗？相信同学们会热情高涨，会有很多意外的收获，这样就会不断地提升同学们“敢想敢做”的自信心与愿望。

上面的解法应该是借助解析法的思想解决几何问题的典型例子，解析法使问题的解决变成了一个很容易想到的操作步骤，而图形计算器的运用使每一步的实现变得很容易，极大地激发了学生的学习热情。图形计算器在上面的解题过程中主要作用是解方程和化简代数式，因此并不妨碍学生对解析法的理解与掌握，反而增强了学好解析几何的自信心。

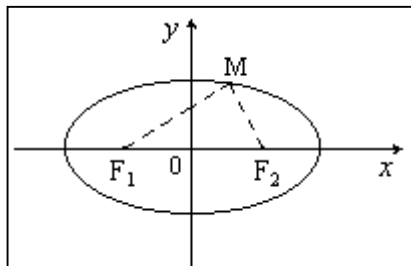
例 椭圆是一种常见的曲线，也是解析几何中重点要研究的曲线之一。要用解析法研究它的性质就需要建立它的方程。

平面内到两定点的距离等于常数（大于两定点的距离）的点的轨迹叫做椭圆。

根据定义我们可以很快写出求椭圆方程的步骤，如下面的流程图所示：



- 1、求椭圆的方程。首先要建立坐标系。曲线上同一个点在不同的坐标系中的坐标不同，曲线的方程也不同，为了使方程简单，必须注意坐标系的选择。怎样选择坐标系，要根据具体情况确定。让同学们讨论或尝试可以发现：选择 x 轴经过两个定点 F_1 、 F_2 ，并且使坐标原点与线段 F_1F_2 的中点重合，这样建立的坐标系是最好的，如右图所示；

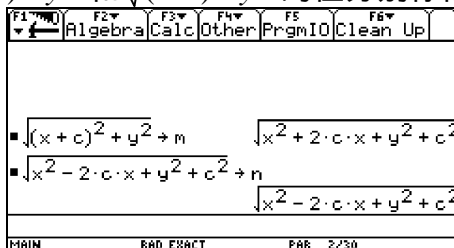


- 2、设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c$ ($c > 0$)， M 与 F_1 和 F_2 的距离的和等于正常数 $2a$ ，则 F_1 、 F_2 的坐标分别是 $(-c, 0)$ 、 $(c, 0)$ ；
 3、椭圆就是动点 M 在满足等量关系式 $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ 条件下所形成的轨迹；
 4、将动点坐标和已知数量代入上面的等量关系式有椭圆方程为

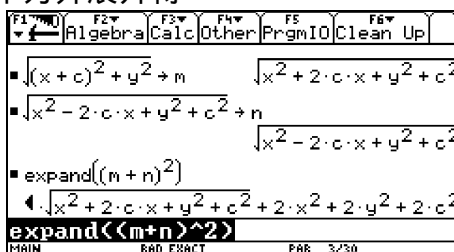
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

- 5、由于上面的方程比较复杂，因此还需要进行化简。在初中的教学中并不要求化简带根式的方程，因此，这里带根式的方程的化简可能学生感到困难，特别是由点 M 适合的条件所列出的方程为两个根式的和等于一个非零常数，化简时要移项，要进行两次平方，再加上方程中字母超过三个，且次数高、项数多，造成难度加大，一堂课根本讲不了什么内容。借助图形计算器可以这样完成这个步骤。

把 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ 和 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 的值分别存储在变量 m 和 n 中



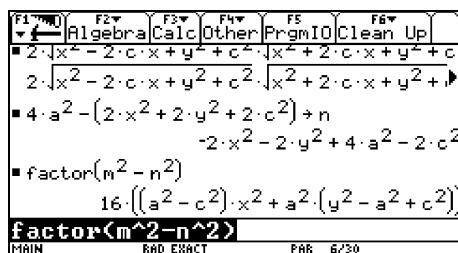
把 $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ 的两边分别平方去根号。
 左边的平方并展开得



即左边 $= 2\sqrt{(x+c)^2+y^2} \times \sqrt{(x-c)^2+y^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2c^2$
 右边 $= 4a^2$

移项方程可变为 $2\sqrt{(x+c)^2+y^2} \times \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - (2x^2 + 2y^2 + 2c^2)$

把 $2\sqrt{(x+c)^2+y^2} \times \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 和 $4a^2 - (2x^2 + 2y^2 + 2c^2)$ 的值分别存储在变量 m 和 n 中，则方程两边平方就可以去掉根号即方程可以写成 $m^2 - n^2 = 0$ ，下面可以直接用图形计算器化简出方程的左边



即方程变为 $16((a^2 - c^2)x^2 + a^2(y^2 - a^2 + c^2)) = 0$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

设 $a^2 - c^2 = b^2$ ($b > 0$), 得 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$\text{得 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

关于证明所得方程是椭圆方程，教师可做简要说明

上面只给出了一种化简变形的方式，其实还有很多种方法，只要想法正确思路清晰就可以用图形计算器轻轻松松地完成化简，使老师和同学有更多的精力放在在代数式变形的方向、目的和意义上，甚至可以有时间去讨论方程每一个等价式子是表示什么样的几何对象，为挖掘椭圆的其它定义奠定基础。由以上的操作步骤可以看出，所完成的任务是多项式的四则运算，这些计算都是我们知到该怎么算只是工作量很大而已，因此图形计算器在这个问题中的使用有利于学生更好地理解数学知识的本质，并且可以拓宽学生的视野激发学生的思维与兴趣。

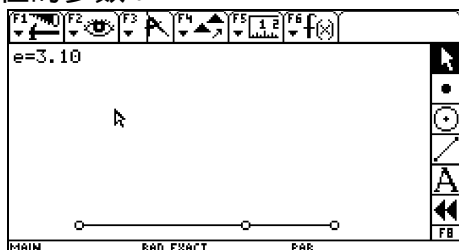
二、图形计算器强大的几何作图系统，可以直接作出或构造出动点的轨迹并进行定性和定量的研究，为我们研究动点轨迹的性质提供了另一条途径，同时也为探求代数对象的几何意义给予了强大的支持

虽然解析几何是用代数的方法研究几何问题，但这毕竟只是解决几何问题的一种方法，借助图形计算器我们可以直接解决几何问题，这并不影响对解析几何的学习，反而更能使学生理解并掌握解析几何最精华的东西——数与形的辨证。一个问题的数学表示是多重性的，运用图形计算器我们可以看见参数的作用。例如：

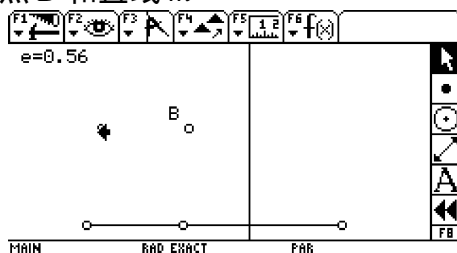
例 平面上到一个定点 B 的距离与到一条定直线 m 的距离之比为一个常数 e ($0 < e$) 的点 F 的轨迹。

这个问题用图形计算器的图形功能可以直接根据题目所给定义对轨迹进行探究

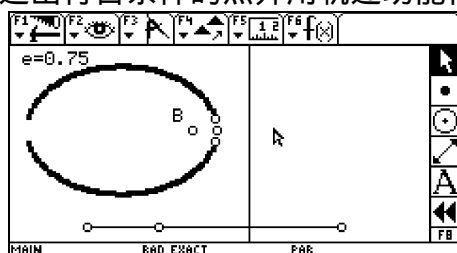
1、建立可以改变数值的参数 e



2、作出可以拖动的点 B 和直线 m



3、用图形计算器构造出符合条件的点并用轨迹功能作出图形



4、改变参数观察图形并归纳出性质.

根据对参数的改变可以观察到图形的形状，从而可以归纳出下面的结论：

- I. 当 $0 < e < 1$ 时，轨迹为椭圆；
- II. 当 $e = 0$ 时，轨迹为抛物线；
- III. 当 $1 < e$ 时，轨迹为双曲线。

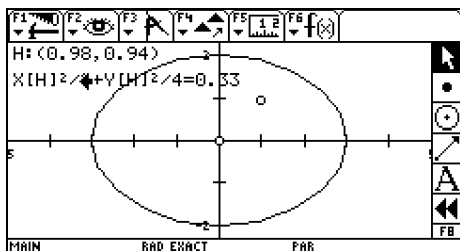
由此可见利用图形计算器可以直接探求到轨迹的形状和类型，这种方法非常的便捷，但并不一定是精确的，因此对轨迹的定量研究也是很必要的，接下来就可以指导学生从曲线方程的角度可以做精确的研究。

图形计算器不仅可以构造出轨迹，而且可以直接在图形界面中对几何对象进行定量研究，为建立几何对象与代数对象之间的联系提供了新的途径。

例 平面上的点与椭圆的位置关系的代数表达是怎样的呢？

通过对曲线与方程的学习，我们不难知道：在曲线上的点是满足方程，满足方程的点必在曲线上。因此曲线外的点不满足方程，即这样的点代入方程后等式不成立，那么这个点使方程两边不等，这种不等与点的位置有什么关系呢？下面利用图形计算器进行下面的研究。

已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，让图形计算器画出椭圆，再作出一个自由点并度量出该点的坐标，把点的坐标代入椭圆方程左边计算出式值，然后拖动点观察式值与 1 的关系



通过操作可以发现：

设点 H 的坐标为 (x_0, y_0)

- I. 当 H 在椭圆上时， $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1$ ；
- II. 当 H 在椭圆内时， $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} \leq 1$ ；
- III. 当 H 在椭圆外时， $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} \geq 1$ 。

接下来可以引导学生把发现的规律进行证明和推广。这个例子体现出图形计算器为学生搭建了一个创新的平台。

三、利用图形计算器开展探究活动，把问题推向深入，培养学生的创新意识与实践能力

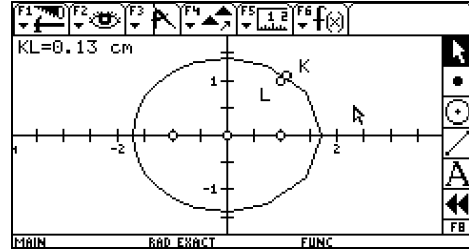
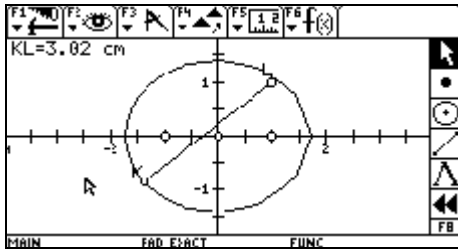
富学生的学习方式、改进学生的学习方法，使学生学会学习，为终身学习和终身发展打下良好的基础，是高中数学课程追求的基本理念。这是因为，社会的发展需要终身教育，而学生在学校中只能获得其需要的部分知识和初步能力，更多的必须在其未来的人生历程中依靠自主的探索、主动的学习，去不断地充实自己，以适应不断变化的社会需要。此外，数学学习不仅仅是记忆一些重要的数学结论，还要发展数学思维能力和积极的情感态度，再加上数学学科高度抽象的特点，这就需要学习者有积极主动、勇于探索的精神，需要有自主探索的过程，需要有多种丰富的学习方式。学生的数学学习方式不应只限于接受、记忆、模仿和练习，还必须倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习数学的方式，力求发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程。

信息技术的影响下，我们更有理由反思传统意义下的数学。因为新技术在人们认识世界的进程中，进一步拓展了我们识别事物所用的“五官”——它们是我们通常意义上认识事物的最直接的手段。我们无不认识到，每一次技术的创新都会使我们更接近理解世界和事物本质。正是借助于新技术，我们才有可能去完成科学的新的探索，同样，借助于新技术我们也可以不断升华我们已有的数学取向，对于教师和学生来说，他们也就有了实现自我数学观的可能性。因为利用新技术，他们会在不断的数学探索过程之中，“看到”他们以往只能想象的数学，“做”他们以往不可能做的数学。

图形计算器既是一个数学知识的图书馆，又是一个仪器装备精良的数学实验室，因此图形计算器是开展数学探究活动的优秀平台。借助图形计算器可以增强人的能力，开阔人的思路，使得再探究数学问题的过程中能够不断地把问题推向深入。下面给出一个以现有题目为基础进行探究的典型案列：

问题 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上的一个动点，点 A(1, 1)，请你给出 |PA| 的取值范围。

首先我们可以运用图形计算器的度量功能直接获得 |PA| 的近似取值范围

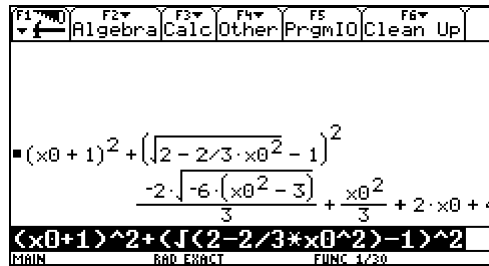


要获得 |PA| 的精确的取值范围，我们可以从建立函数的角度出发。设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) ，由上面的初步研究我们可以知道：|PA| 取到最小值的范围是

$$x_0 \in (-\sqrt{3}, 0), \quad y_0 \in (0, \sqrt{2}), \quad y_0 = \sqrt{2 - \frac{2}{3}x_0^2}$$

$$\begin{aligned} |PA| &= \sqrt{(x_0 + 1)^2 + (y_0 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(x_0 + 1)^2 + \left(\sqrt{2 - \frac{2}{3}x_0^2} - 1\right)^2} = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + \left(\sqrt{2 - \frac{2}{3}x_0^2} - 1\right)^2} \end{aligned}$$

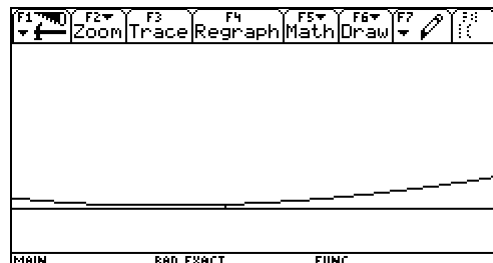
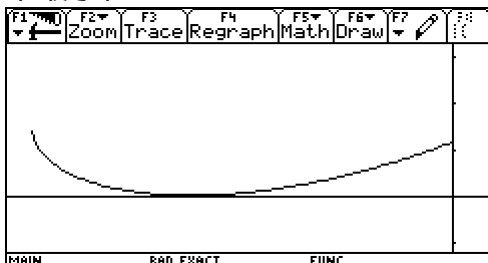
利用图形计算器我们可以对根号内部展开



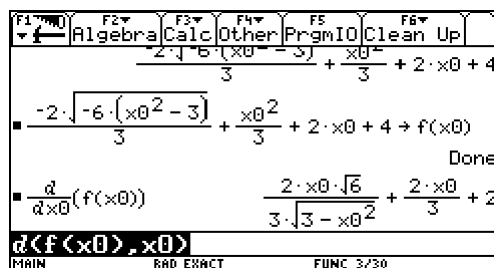
要解决 |PA| 的范围问题，设 $|PA| = \sqrt{f(x)}$ ，就只需要解决函数

$$f(x) = \frac{-2\sqrt{-6(x_0^2 - 3)}}{3} + \frac{x_0^2}{3} + 2x_0 + 4, \quad x_0 \in (-\sqrt{3}, 0), \text{ 的范围了,}$$

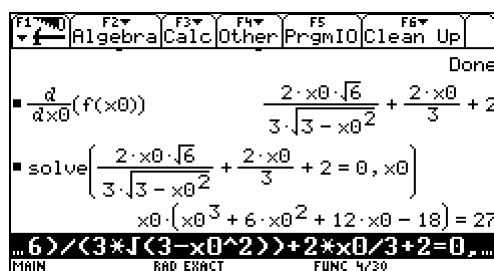
下面我们画出了函数的完整图象和局部放大的图象，不难看出函数先减后增，有一个最小值



接下来对函数的变化趋势做定量的研究，用图形计算器求出其导数



结合图象可知： $x_0 \in (-\sqrt{3}, 0)$ 时导数为零的地方就是取得的地方就是函数的最小值点。下面用图形计算器解导数为零的方程



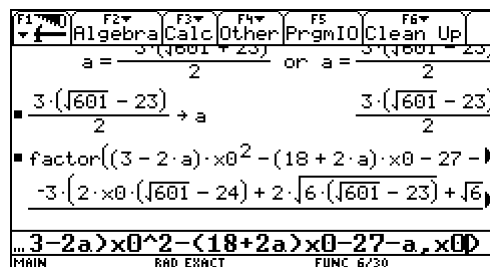
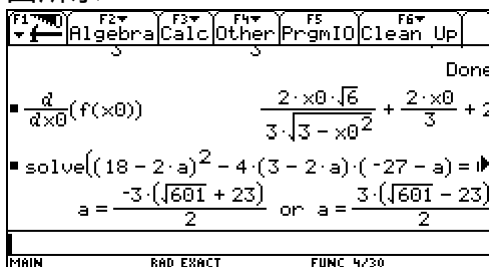
显然需要解决四次方程 $x_0^4 + 6x_0^3 + 12x_0^2 - 18x_0 - 27 = 0$,图形计算器无法直接进行求解，需要进行转化。

根据相关知识，我们已经知道这个方程可以象二次方程一样进行配方达到降次的目的 $(x_0^2 + 3x_0)^2 + 3x_0^2 - 18x_0 - 27 = 0$

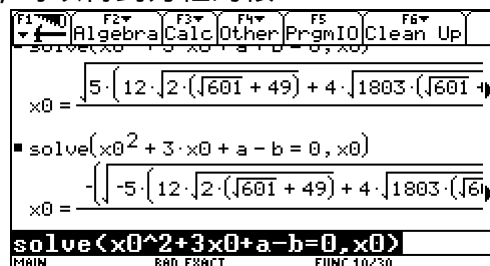
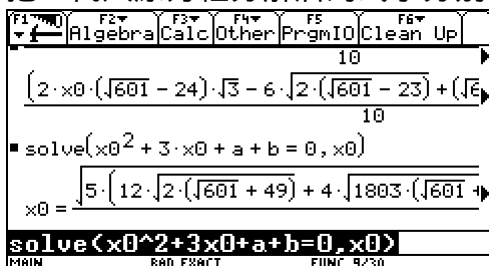
我们希望能够配成 $[(x_0^2 + 3x_0)^2 + 2a(x_0^2 + 3x_0) + a] + (3-2a)x_0^2 - (18+2a)x_0 - 27 - a = 0$ 要求 $(3-2a)x_0^2 - (18+2a)x_0 - 27 - a$ 是一个完全平方式，则有：

$$\Delta = (18 + 2a)^2 - 4(3 - 2a)(-27 - a) = 0$$

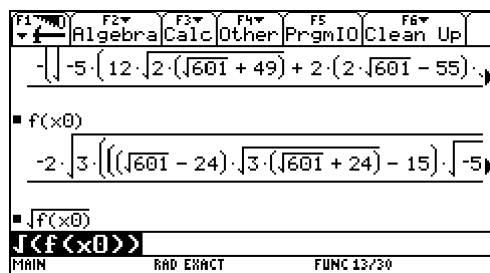
利用图形计算器可以很快解出 a ,并对 $(3-2a)x_0^2 - (18+2a)x_0 - 27 - a$ 进行因式分解，如下图所示



把 a 代入原方程分解后的式子分别求解，可以得到方程的根



把 $x_0 \in (-\sqrt{3}, 0)$ 的根带入原函数就可以得到函数最小值的精确解



由于精确解的式子比较复杂这里就不完整地写出来了。最大值的问题也可以采用类似的方法完成。整个问题解决过程涉及的知识面较广并且有较高的深度，但图形计算器的合理运用使得在数学思想指导下的操作过程变的更容易，有利于问题的解决，有利于学生产生新的思想，有利于学生创新实践能力的培养

上面给出的就具体问题的探究，推广以后就能解决一类问题。而且现有的问题稍加改动就可以获得新的研究方向，不断开发出新的探究领域。如下面一个例子：

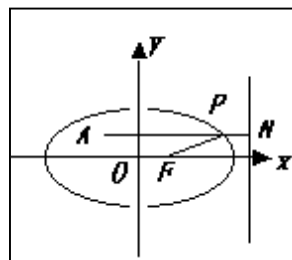
问题 2 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ，椭圆内的点 $A(-2, \sqrt{3})$ ，右焦点为 F ，在椭圆上求一点 P 使 $|AP| + 2|PF|$ 为最小。

解：由标准方程知， $c=2$ ， $e=\frac{1}{2}$ 作椭圆的右准线

$l: x=8$ ，过 P 作 $PN \perp l$ ，由椭圆的定义知

$$|PF| = e \cdot |PN| = \frac{1}{2} |PN|,$$

$|AP| + 2|PF| = |AP| + |PN| > |AN|$ ，当且仅当 A, P, N



共线且 $AN \perp l$ 时有最小值 $|AN|$ ，此时点 P 的纵坐标与点 A 的纵坐标 $y = \sqrt{3}$ 相等，代入标准方程可求的横坐标 $x = 2\sqrt{3}$ 得 $P(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ，使 $|AP| + 2|PF|$ 为最小。

上面给出的一种解法是很多参考书中给出的一种解法。分析上面的解题方法，我们可以上面问题解决主要是把问题归结为了平面几何中的一个结论：平面上到定点的距离与到定直线距离和的最小值是定点到定直线的距离。因此曲线上的动点到定点和定直线距离之和的最小值问题（如果定点到定直线的垂线段与曲线有交点）都可以转化为这个问题解决（交点就是最值点）。在这里，同学们可以自己编制出类题。

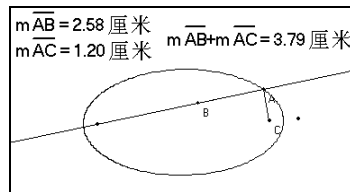
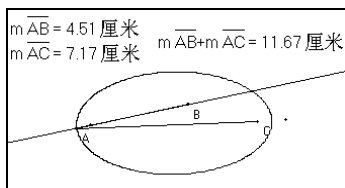
进一步展开联想，平面几何中还有下面一些结论可以用来解决解析几何中的最值问题：

- I. 利用两点间距离最段。
- II. 利用三角形两边之和大于第三边。
- III. 利用三角形两边之差小于第三边。

如果把这个问题改编为：求 $|AP| + |PF|$ 的取值范围，又该如何解决呢？

先由图可以看出最大值和最小值点都是 AF_1 与椭圆的交点（下面的图是在任意的椭圆条件下的数学实验），接下来的工作就是对这个结论进行平面几何的或代

数的证明即可，这里就不在赘述。



如果把问题推广为：求 $|AP| + k|PF|$ ($k > 0$) 的取值范围，又该如何解决呢？

由于 $|AP| + |PF|$ 、 $|PF|$ 和 $|AP|$ 的取值范围已经解决，则 $|AP| + k|PF|$ 可以看成是线性规划问题：设 $x = |PF|$ 和 $y = |AP|$ ，则有 $y + x = m$ 和 $y + kx = n$ ，已知 x, y, m 的范围求 n 的范围，因此问题利用线性规划的知识就可以解决。

以此为基础我们可以不断地提出新的问题，在问题的解决过程中不断地挑战自我，使自己的能力不断地提升。而且同学们在问题解决过程中还可以从查阅书籍和网络了解问题的现状与背景，学到新的知识形成终身学习的良好习惯。

参考文献

- 1、 简洪权．高中数学运算能力的组成及培养策略．《中学数学教学参考》2000．1-2
- 2、 郭思乐《思维与数学教学》(91年6月版)
- 3、 中国教育学会中学数学教学专业委员会编《面向21世纪的数学教学》
浙江教育出版社1997年5月第1版。
- 4、 严乃超：《浅谈研究性学习课题实施中的指导策略》
- 5、《几何画板》在高中数学教学中的应用 徐秋慧