

用 TI 图形计算器解决“数据处理型”应用题

作者：郑军强

年级：高一年级

学校：广东省中山市第一中学

内容提要：20 世纪下半叶以来，数学应用的巨大发展是数学发展的显著特征之一。当今知识经济时代，数学和信息技术的结合使得数学能够在许多方面直接为社会创造价值，同时，也为数学发展开拓了广阔的前景。我国的数学教育在很长一段时间内对于数学与实际、数学与其他学科的联系未能给予充分的重视，因此，高中数学在数学应用和联系实际方面需要大力加强。本文作者利用 TI 图形计算器去解决“数据处理型”应用题，旨在体现数学应用的理念，激发学生学习数学的兴趣，增强学生的应用意识，引导学生关心社会、关心未来，提高学生运用数学知识解决实际问题的兴趣，体会到数学的价值，增强学好数学的信心。

主题词：数据处理 数学模型 回归分析

用 TI 图形计算器解决“数据处理型”应用题

提要 20 世纪下半叶以来，数学应用的巨大发展是数学发展的显著特征之一。当今知识经济时代，数学和信息技术的结合使得数学能够在许多方面直接为社会创造价值，同时，也为数学发展开拓了广阔的前景。我国的数学教育在很长一段时间内对于数学与实际、数学与其他学科的联系未能给予充分的重视，因此，高中数学在数学应用和联系实际方面需要大力加强。本文作者利用 TI 图形计算器去解决“数据处理型”应用题，旨在体现数学应用的理念，激发学生学习数学的兴趣，增强学生的应用意识，引导学生关心社会、关心未来，提高学生运用数学知识解决实际问题的兴趣，体会到数学的价值，增强学好数学的信心。

数学应用问题形式多样，解法灵活。在应用题的各种题型中，有这样一类题型：信息由表格数据的形式给出，要求对数据进行合理的转化处理，建立数学模型，解答有关的实际问题。解答此类题型主要有如下三种方法：

(1) 直接法：若由题中条件能明显确定需要用的数学模型，或题中直接给出了需要用的数学模型，则可直接代入表中的数据，问题即可获解；

(2) 列式比较法：若题所涉及的是最优化方案问题，则可根据表格中的数据先列式，然后进行比较；

(3) 描点观察法：若根据题设条件不能直接确定需要用哪种数学模型，则可根据表中的数据在直角坐标系中进行描点，作出散点图，然后观察这些点的位置变化情况，确定所需要用的数学模型，问题即可顺利解决。下面通过举例进行说明。

一、函数型

(一) 一次函数型

例 1、某地区 1995 年底沙漠面积为 95 万公顷，为了解该地区沙漠面积的变化情况，进行了连续 5 年的观测，并将每年年底的观测结果记录如下表。根据此表所给的信息进行预测：

(1) 如果不采取任何措施，那么到 2010 年底，该地区的沙漠面积将大约变为多少万公顷；

(2) 如果从 2000 年底后采取植树造林等措施，每年改造 0.6 万公顷沙漠，那么到哪一年年底该地区沙漠面积减少到 90 万公顷？

观测时间	1996 年底	1997 年底	1998 年底	1999 年底	2000 年底
该地区沙漠比原有面积增加数 (万公顷)	0.2000	0.4000	0.6001	0.7999	1.0001

分析：建立模型，输入数据，画图，观察图象，做一个一元一次回归分析，可得一个一元一次函数。

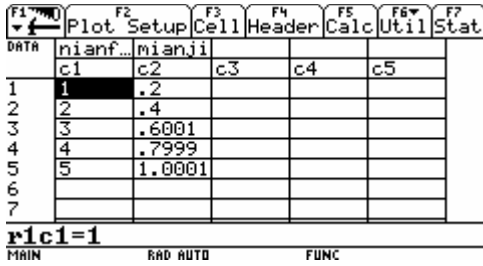


图 1

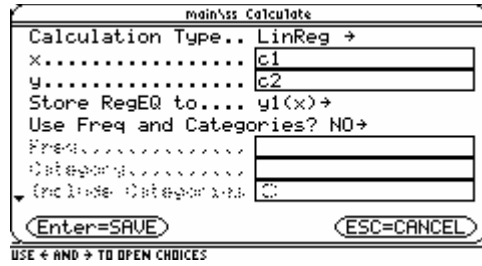


图 2

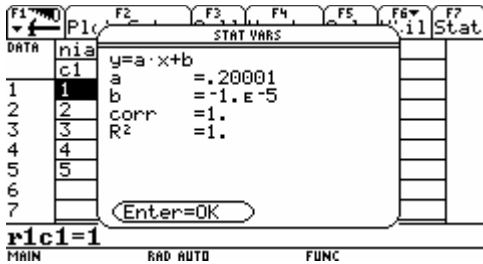


图 3

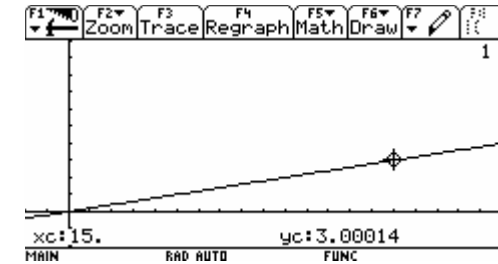


图 4

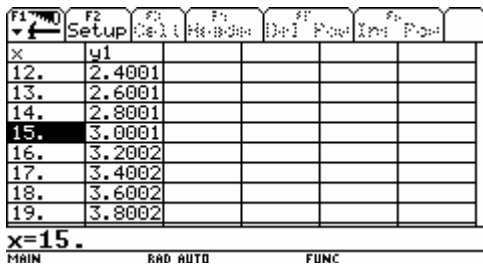


图 5

预测:根据这个数学模型,到 2010 年年底沙漠面积大约为 $95+0.5 \times 15=98$ (万公顷)。

解析:(1)由表观察知,沙漠面积增加数 y 与年份数 x 之间的关系图象近似地为一次函数 $y=kx+b$ 的图象。

将 $x=1, y=0.2$ 与 $x=2, y=0.4$, 代入 $y=kx+b$, 求得 $k=0.2, b=0$,

所以 $y=0.2x (x \in \mathbb{N})$ 。

因为原有沙漠面积为 95 万公顷,则到 2010 年年底沙漠面积大约为 $95+0.5 \times 15=98$ (万公顷)。

(2)设从 1996 年算起,第 x 年年底该地区沙漠面积能减少到 90 万公顷,由题意得 $95+0.2x-0.6(x-5)=90$, 解得 $x=20$ (年)。

故到 2015 年年底,该地区沙漠面积减少到 90 万公顷。

(二) 二次函数型

例 2、一辆中型客车的营运总利润 y (单位:万元)与营运年数 $x (x \in \mathbb{N})$ 的变化关系如表所示,则客车的运输年数为 () 时该客车的年平均利润最大。

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

x 年	4	6	8	...
$y = ax^2 + bx + c$ (万元)	7	11	7	...

分析:建立模型,输入数据,画图,观察图象,做一个一元二次回归分析,可得一个一元二次函数。

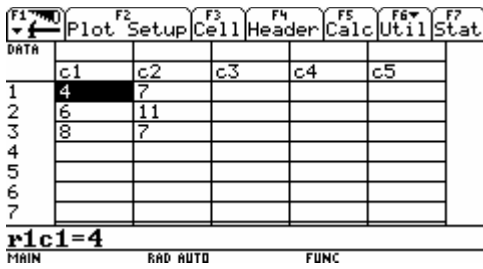


图 6

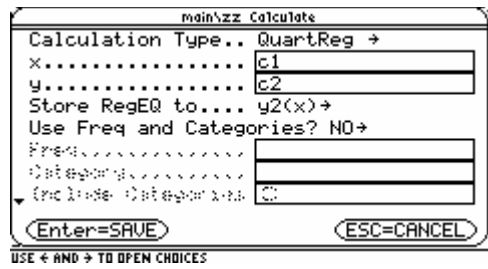


图 7

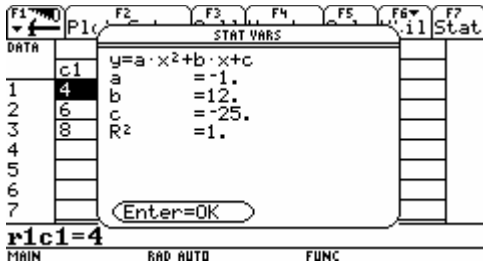


图 8

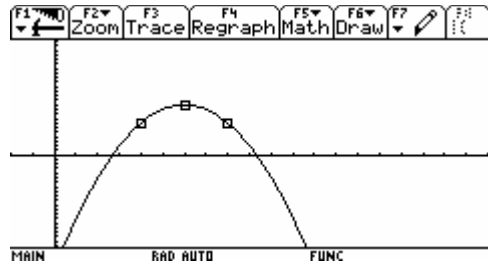


图 9

解析：表中已给出了二次函数模型 $y = ax^2 + bx + c$ ，

由表中数据知，二次函数的图象上存在三点 $(4, 7)$ ， $(6, 11)$ ， $(8, 7)$ ，则

$$\begin{cases} 7 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c, \\ 11 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c, \\ 7 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c. \end{cases} \quad \text{解得 } a=-1, b=12, c=-25,$$

即 $y = -x^2 + 12x - 25$ 。

又 $\frac{y}{x} = -x + 12 - \frac{25}{x} = -(x + \frac{25}{x}) + 12 \leq -10 + 12 = 2$ ，而取“=”的条件为 $x = \frac{25}{x}$ ，

即 $x=5$ ，故选 (B)。

例 3、行驶中的汽车，在刹车后由于惯性的作用，要继续向前滑行一段距离后才会停下，这段距离叫刹车距离。为测定某种型号汽车的刹车性能，对这种型号的汽车在国道公路上进行测试，测试所得数据如下表。在一次由这种型号的汽车发生的交通事故中，测得刹车距离为 15.20m，问汽车在刹车时的速度是多少？

刹车时速 $v/\text{km/h}$	15	30	40	50	60	80
刹车距离 s/m	1.23	7.30	12.2	18.40	25.80	44.40

分析：建立模型，输入数据，画图，观察图象，做一个一元二次回归分析，可得一个一元二次函数。

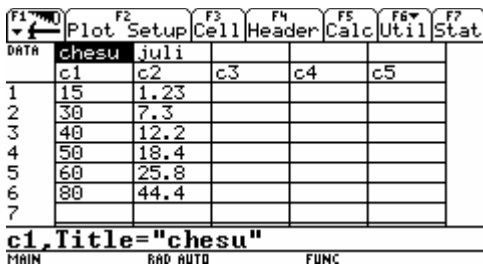


图 10

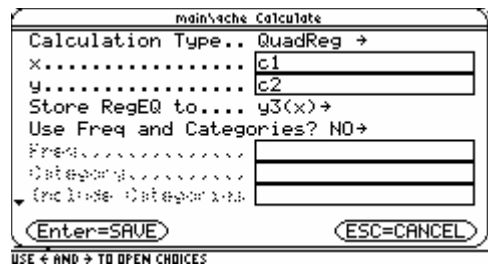


图 11

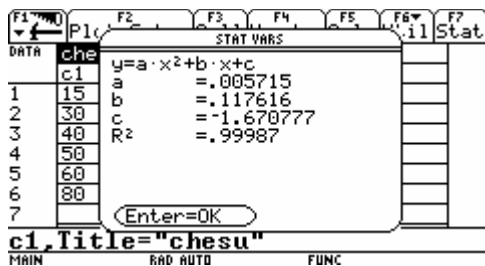


图 12

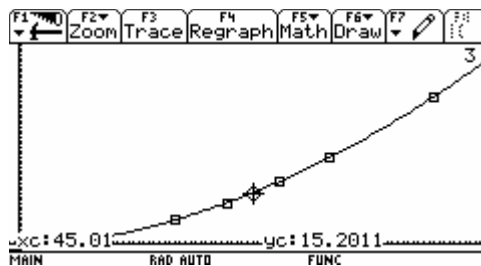


图 13

解析：根据上表数据，建立描述 v 与 s 之间关系的数学模型的问题。此模型不能由表格中的数据直接看出，因此，以刹车时车速 v 为横轴，以刹车距离 s 为纵轴建立直角坐标系。根据表中的数据作散点图，可看出应选择二次函数作拟合函数。假设变量 v 与 s 之间有如下关系式： $s = av^2 + bv + c$ ，因为车速为 0 时，刹车距离也为 0，所以二次曲线的图象应通过原点 $(0, 0)$ 。再在散点图中任意选取两点 $A(30, 7.30)$ ， $B(80, 44.40)$ 代入，解出 a 、 b 、 c 于是

$$s = 0.0062v^2 + 0.0563v \text{。 (代入其他数据有偏差是许可的)}$$

将 $s=15.20$ 代入 得 $15.20 = 0.0062v^2 + 0.0563v$ ，解得 $v \approx 45.01$ 。

所以，汽车在刹车时的速度是 45.01km/h。

(三) 分段函数型

例 4、某集团在 2000 年斥巨资分三期兴建垃圾资源化处理工厂，如下表：

一期 2000 年投入 1 亿元	兴建垃圾堆肥厂	年处理有机肥十多万吨	年综合收益 2 千万元
二期 2002 年投入 4 亿元	兴建垃圾焚烧发电一厂	年发电量 1.3 亿 kw/h	年综合收益 4 千万元
三期 2004 年投入 2 亿元	兴建垃圾焚烧发电二厂	年发电量 1.3 亿 kw/h	年综合收益 4 千万元

如果每期的投次从第二年开始见效，且不考虑存贷款利息，设 2000 年以后的 x 年的总收益为 $f(x)$ (单位：千万元)，试求 $f(x)$ 的表达式，并预测到哪一年能收回全部投资款。

分析：建立模型，输入函数表达式，画图，观察图象，根据图象的变化趋势，做出合理的预测。

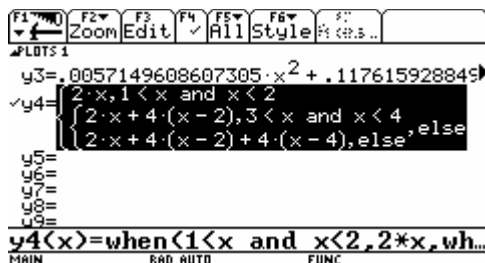


图 14

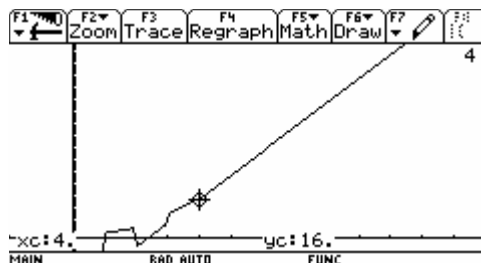


图 15

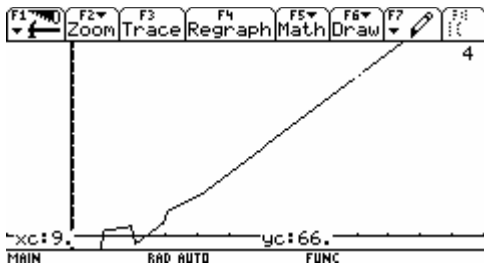


图 16

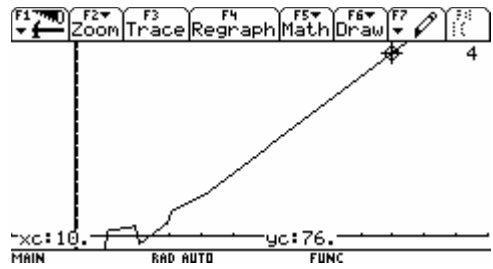


图 17

x	y				
4	56				
8	66				
10	76				
11	86				
12	96				
13	106				
14	116				
15	126				

图 18

预测：根据这个数学模型，观察图 16 与图 17 的数据（或根据数据表格图 18），可知 $x=10$ 时，即到 2010 年可以收回全部投资款

解析：由表中的数据知，本题需用分段函数进行处理。由表中的数据易得，

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \{1, 2\} \\ 2x + 4(x - 2), & x \in \{3, 4\} \\ 2x + 4(x - 2) + 4(x - 4), & x \in \{5, 6, 7, \dots\} \end{cases} .$$

显然，当 $x \leq 4$ 时，不能收回投资款。

当 $x \geq 5$ 时，由 $f(x) = 10x - 24 > 70$ ，

得 $x > 9.4$ ，取 $x = 10$ 。所以到 2010 年可以收回全部投资款。

(四) 三角函数型

例 5、某港口水的深度 $y(m)$ 是时间 $t (0 \leq t \leq 24, \text{单位: h})$ 的函数，记作 $y=f(t)$ 。下面是某日水深的的数据：

t/h	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y/m	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0	10.0

经长期观察， $y=f(t)$ 的曲线可以近似地看成函数 $y=A\sin \omega t+b$ 的图象。(1) 试根据以上数据求出函数 $y=f(t)$ 的近似表达式；(2) 一般情况下，船舶航行时，船底离海底的距离为 5m 或 5m 以上时认为是安全的（船舶停靠时，船底只需不碰海底即可）。某船吃水深度（船底离水面的距离）为 6.5m，如果该船希望在同一天内安全进出港，请问，它最多能在港内停留多少时间（忽进出港所需的时间）？分析：建立模型，输入数据，画图，观察图象，做一个三角函数回归分析，可得一个三角函数。

DATA	x	y			
1	0	10			
2	3	13			
3	6	9.9			
4	9	7			
5	12	10			
6	15	13			
7	18	10.1			

图 19

图 20

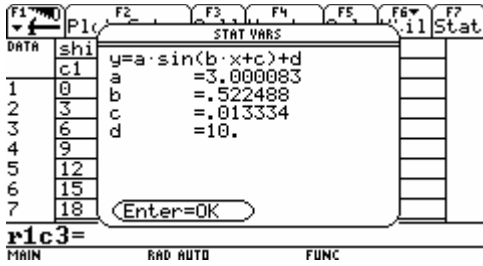


图 21

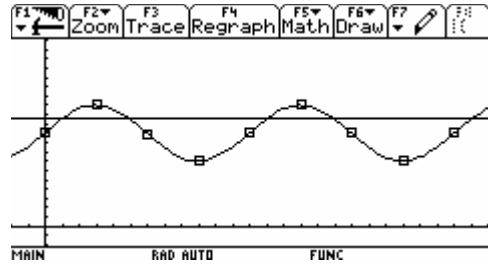


图 22

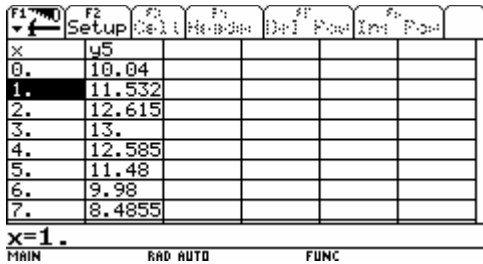


图 23

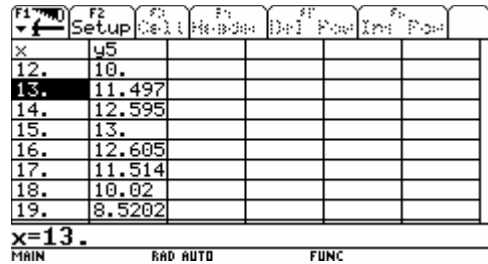


图 24

预测：由图 22 可知水深不小于 11.5 m 的时间有两段，由图 23 和图 24 的数据表格可知，在凌晨 1 时到凌晨 5 时和下午 13 时到下午 17 时船舶停靠安全。

解析：题中直接给出了具体的数学模型，因此可直接采用表中的数据进行解答。

(1) 由表中数据易得 $A = \frac{13-7}{2} = 3$ ，周期 $T=12$ ， $\omega = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ ， $b=10$ ，

所以 $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 10\right) + 10$ 。

(2) 由题意，该船进出港时，水深应不小于 $5+6.5=11.5$ (m)，

所以 $3\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 10\right) + 10 \geq 11.5$ ，化为 $\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 10\right) \geq \frac{1}{2}$ ，应有 $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}t + 10 \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ，

解得 $12k+1 \leq t \leq 12k+5$ ($k \in \mathbb{Z}$)。

在同一天内取 $k=0$ 或 1 ，

所以 $1 \leq t \leq 5$ 或 $13 \leq t \leq 17$ ，

所以该船最早能在凌晨 1 时进港，最晚在下午 17 时出港，在港口内最多停留 16 个小时。

二、直线型

例 6、某市场信息中心采集了一些供求信息，对菜椒的市场需求量和供给量进行调查后得到以下数据：表 1：菜椒市场供给量信息表，表 2：菜椒市场需求量信息表。试求市场的供需平衡点（即供给量与需求量相等的情形）。

表 1 菜椒市场供给量信息表

1kg 价格 P 元	2	2.8	3.4	4	5
供给量 Q/t	29	34	37	40.5	47

表 2 菜椒市场需求量信息表

1kg 价格 P 元	2	2.4	2.6	2.8	4
需求量 Q/t	40	38.5	37	36	30

分析：建立模型，输入数据，作出供给量（或需求量）与价格之间的回归分析，画图，观察图象，或利用解线性方程组的方法，分析出市场达到供需平衡，此时菜椒价格在每公斤 3 元左右。

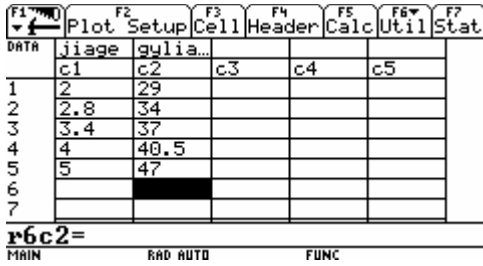


图 25

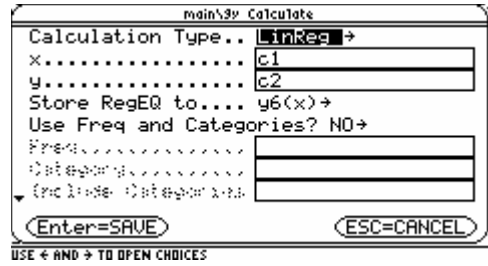


图 26

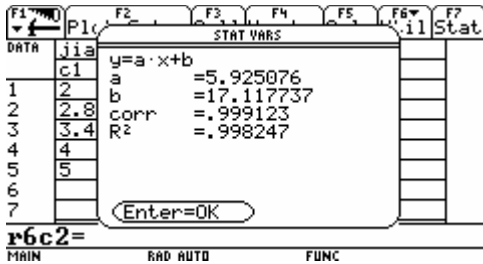


图 27

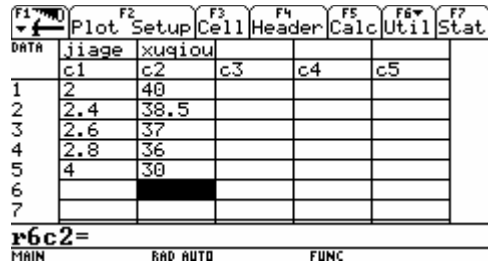


图 28

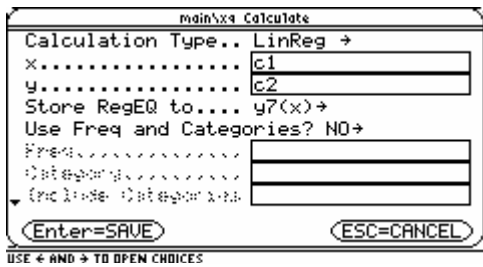


图 29

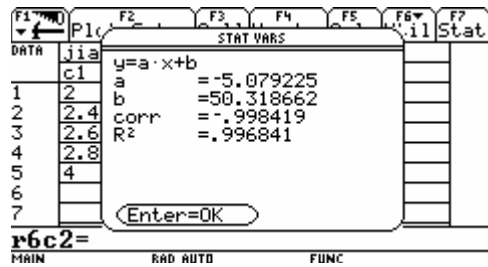


图 30

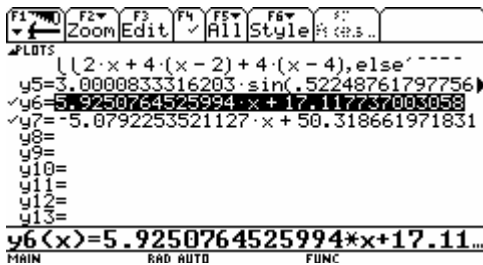


图 31

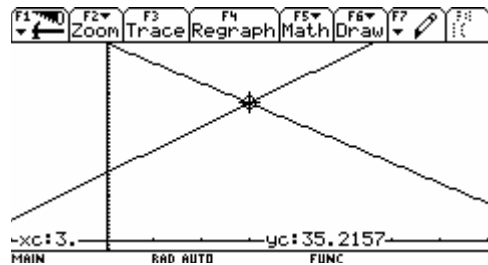


图 32

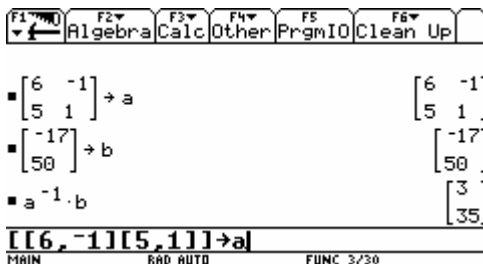


图 33

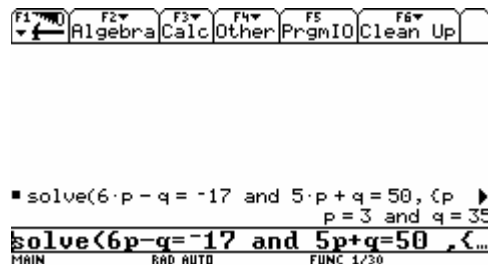


图 34

解析：本题涉及两个表格数据库，其所需要用的数学模型由表格中的数据较难胡定，因此可采用描点观察法。以横轴为供给量 Q （或需求量），纵轴为价格 P ，由所给数据在 $Q-P$ 坐标系内作出散点图，然后寻找近似点的供给线和需求线。它的供给线近似于直线 $6P-Q+17=0$ ，需求线近似于直线 $5P+Q-50=0$ 。供给线与需求线的交点就是市场供需平等点，

此点坐标可由方程组 $\begin{cases} 6P - Q + 17 = 0 \\ 5P + Q - 50 = 0 \end{cases}$ ，解出 (3, 35)。这说明，当供给量与需求量接近

35t 时，市场达到供需平等，此时菜椒价格在每公斤 3 元左右。

三、数据统计、回归分析

例 7、试预测 2000 年我国进出口总额

1981 年至 1996 年我国进出口总额情况如下所示：

年份	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
年度(X)	1	2	3	4	5	6	7	8
总额(Y)	4	3.9	4	5	6	6	6.8	7.9
年份	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
年度(X)	9	10	11	12	13	14	15	16
总额(Y)	11.2	11.5	13.5	16.6	19.6	24	28.1	29

分析：建立模型，输入数据，画图，观察图象，做一个指数函数或幂函数回归分析，通过分析比较可得幂函数回归比较好。

解析：(一)：观察点的分布情况。

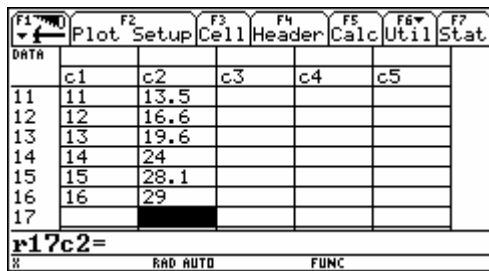


图 35

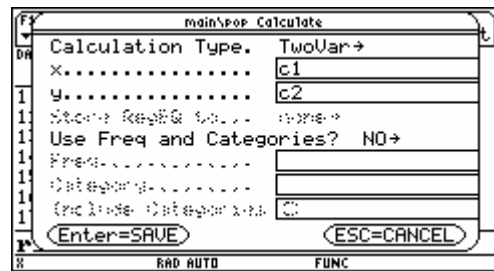


图 36

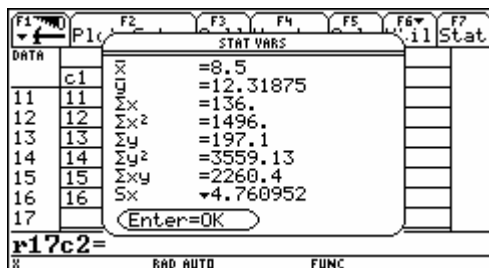


图 37

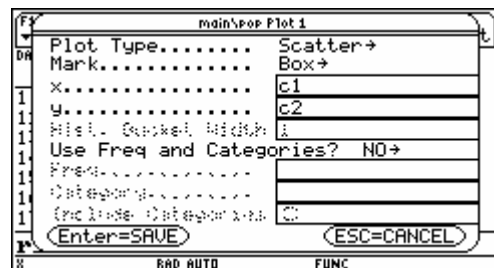


图 38

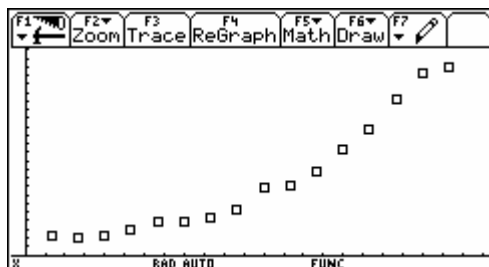


图 39

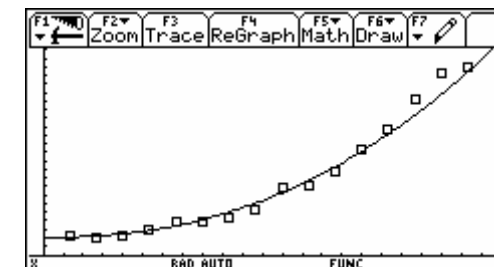


图 40

由图可观察出，这些点的分布大致呈指数曲线和幂函数曲线形状，

不妨设 $y = 3.8 + cx^d$, (1) $y = ae^{bx}$, (2)

将(1)式变形为 $\ln(y - 3.8) = \ln c + d \ln x$, 令 $y' = \ln(y - 3.8)$, $x' = \ln x$, $\alpha = \ln c$,

$$\beta = d \quad \text{则有 } y' = \alpha + \beta x'$$

由最小二乘法, 求得 $\beta = 2.282$, $\alpha = -3.149$, 即求出 $c = 0.043$, $d = 2.287$. 于是得幂函数

$$\text{形式的经验回归方程为 } y = 3.8 + 0.04 \times x^{2.287} \quad (3)$$

(二): 同样地, 得指数形式的经验回归方程为 $y = 2.971 \times e^{0.142x}$ (4)

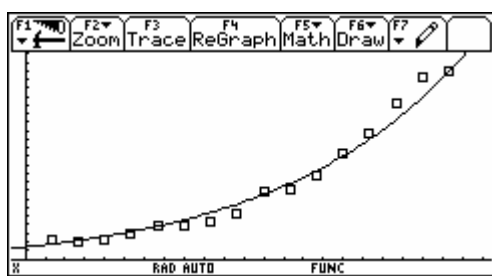


图 41

计算方差 $\sum (y_i - \bar{y}_i)^2$, 其中 \bar{y}_i 为由经验回归方程计算出的估计值, 利用 (3) 式所得结果为 20.623, 利用 (4) 式所得结果为 22.609, 说明 (3) 式比 (4) 式更好地拟合了数据, 故用 (3) 式的模型预测未知量就比 (4) 式预测未知量的可信度要高。

从而 $f(2000) \approx 4444$ 亿美元。

四、最优化问题

例 8、有一农家准备种植 100 亩小麦和玉米, 已知种植 1 亩玉米需花费 300 元, 种植 1 亩小麦是 250 元, 假设这户农家最高能承受的费用是 26500 元, 要求: (1) 建立一个数学模型为这户农家种植提供方案; (2) 画图, 确立可行方案的范围; (3) 如果每亩玉米的利润是 100 元, 每亩小麦的利润是 90 元, 请你为这户农家确立一个最佳方案, 使利润最大。

分析: 建立模型, 画图, 观察图象中的可行域, 利用矩阵求出顶点坐标, 计算出最大利润。

解: 设种植 x 亩玉米, y 亩小麦, 数学模型是:

画图 42, 阴影部分表示方案的可能区域,

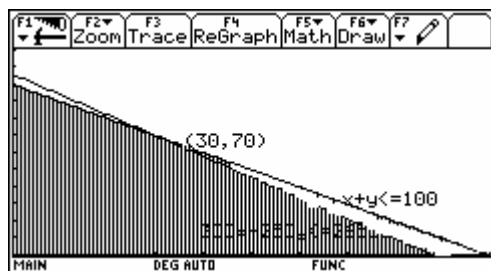


图 42

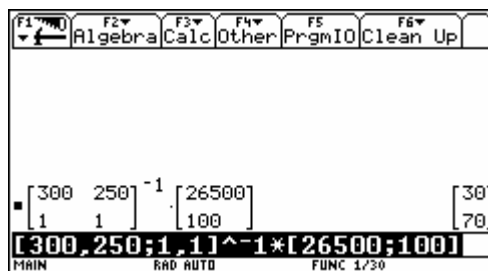


图 43

用矩阵求出顶点坐标, 四个端点坐标是: $(0, 0)$, $(88, 0)$, $(30, 70)$, $(0, 100)$ (图 43), 并且当在点 $(30, 70)$ 时有最大利润 9300 元

以上几例是利用图形计算器对数据进行绘图、回归和分析, 从而描述出其数学模型, 或其遵循的数学规律. 技术的应用使数学学习变得生动、有趣, 图形计算器所具有的巨大潜力还需要每一位使用它的同学和教师不断挖掘, 本人仅在此抛砖引玉。

注：本文中所使用图形计算器均为美国德州仪器公司(Texas Instruments Inc.)的 TI—92Plus

参考文献

- [1] 章建跃. 《中学数学课程教材与信息技术整合的思考》 2002.11.
- [2] 盛中平. 《大学数学实验》 东北师范大学数学系 2001. 9.
- [3] 唐瑞芬等编 《数学学习中的DIY—TI技术与数学实验》 华东师范大学出版社 2003年版。