由一个问题想到的

王静园（北京首都师范大学附属中学 100037）

目前, 高中数学课程改革中倡导研究性学习, 所谓研究性学习是指学生在教师指导下,以类似科学研究的方式去获取知识和应用知识的学习方式. 要把这种理念转化为学生的实际操作, 我想应该从日常的学习中抓起.

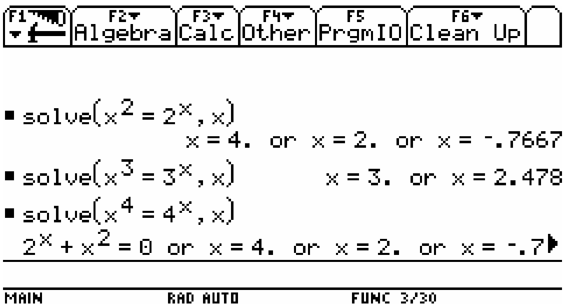
案例 1 当 $x>0$ 时, 问 x^2 与 2^x 的交点个数.

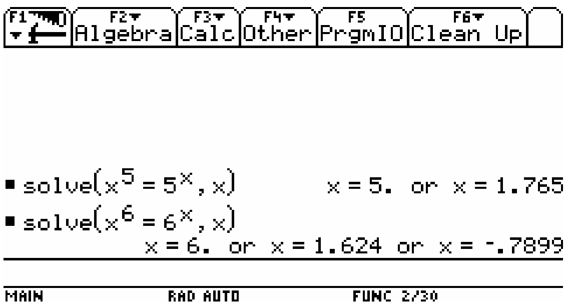
这是一道很普通的题目, 在许多练习册中都能见到. 一般, 教师都会引导学生从图象入手. 由于学生对二次函数和指数函数的图象都很熟悉, 因此从图象上很容易知道有两个交点. 为了引导学生多往下想一步, 我又提出了新的问题: 当 $x>0$ 时, 问 x^3 与 3^x 的交点个数. 由于有了前面的经验, 学生很快通过图象给出了答案. 此时, 他们自己也提出了问题, 如果把问题改为: 当 $x>0$ 时, 问 x^a 与 a^x （$a>1, a\in N^*$）的交点个数.

问题一经提出, 学生就开始画起图来. 经过讨论, 大家一致认为: 由于这两个函数在 R 上都是增函数, 从图象上看, 有两种情况可能出现: (I) 有两个交点; (II) 有一个交点, 即图象在某点相切.

为了研究清楚这个问题, 我们首先想到了利用图形计算器的画图功能, 看看随着 a 的变化, 图象是如何变化的. 由于 TI 图形计算器的图象功能不够强大, 我们无法得到想要的答案. 一时间, 大家都有些不知如何下手.

看来此路不通, 我们能不能从别的角度考虑一下这个问题. 比如说: 解方程的角度.
由于图形计算器具有强大的计算功能, 很快, 同学们就算出了以下几组解.





这里我们不考虑负解, 把所有的解整理得到

a=2, x=2 or x=4;
a=3, x= 2.478 or x=3;
a=4, x=4 or x=2;
a=5, x=1.765 or x=5;
a=6, x=1.624 or x=6.

不难发现, 对于方程 $x^a=a^x$, a 是它的一个解. 这一点从方程的特点, 也很容易看出. 从给出的几组值来看, 我们初步断定 x^a 与 a^x （$a>1, a\in N^*$）的图象有两个交点. 即第一种情况不成立. 那么如何说明方程 $x^a=a^x$ （$a>1, a\in N^*$）有两个解呢？从给出的几组数据来看, 当 a>4 时, 方程的两个解一个是 a, 另一个比 a 小. 如果要想说明方程有两个解, 根据函数的单调性, 只需说

明当a>4 时, 存在某一个数, 不妨设为b, 使得$b^a > a^b$即可. 那么, 在 0 和a之间找哪一个数呢？经分析:这个数b要满足两个条件:1. 0<b<a 2. 这个数方便计算. 这里我们选定$b=\sqrt{a}$. 要证明不等式$\left(\sqrt{a}\right)^a > a^{\sqrt{a}}$, 由于这个不等式两边是两个指数式, 两边取对数得$a\lg\sqrt{a} > \sqrt{a}\lg a$, 进一步有$\frac{1}{2}a\lg a > \sqrt{a}\lg a$. 则只需证明$\frac{1}{2}a > \sqrt{a}$. 两边平方整理得$a^2-4a>0$. 由于$a$>4, 所以显然有$a^2-4a>0$成立. 又知当$a$=2 和$a$=3 时, x^a与a^x 有两个交点. 所以当$x>0$时, x^a与a^x（$a>1, a\in N^*$）有两个交点.

进一步探究

如果我们把a的范围由正整数扩充到有理数, 到实数呢, 结果如何. 由幂函数的性质, 我们容易得到, 当$x>0$时, x^a与a^x （$a\ge 4$）有两个交点. 若 2≤a<4, 类似于前面的证明, 我们只要说明存在某一个数b, 使得$b^a > a^b$即可. 取$b=2\sqrt{a}$, 显然有$a<2\sqrt{a}<4$. 要想证明$\left(2\sqrt{a}\right)^a > a^{2\sqrt{a}}$, 只需证明$a\lg(2\sqrt{a}) > 2\sqrt{a}\lg a$, 整理有$\lg 2 > \left(\frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2}\right)\lg a$. 而由 2≤$a$<4 可知, $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{a}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则$\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2}\right)\lg a \le \left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\lg a < \lg a \le \lg 2$, 问题得证. 但此时还不能解决 1<$a$<2 的情况. 问题出在什么地方呢？此时再次利用图形计算器发现当a=1.5 时, 方程的解为 $\boldsymbol{x}$=7.409 or $\boldsymbol{x}$=1.5. 因此我们必须重新选择b的取值. 经分析, 取$b=a^2$. 因为$a<2$, 所以有$2\lg a > a\lg a$, 进一步有$a\lg a^2 > a^2\lg a$, 则$\left(a^2\right)^a > a^{a^2}$, 至此问题得到解决. 即$x>0$时, x^a与a^x （$a>1$）有两个交点. 若 0<$a\le 1$, 由图象可知, x^a与a^x 有一个交点.

到此, 我们可以得到以下结论:当$x>0$时, 若 0<$a\le 1$, x^a与a^x 有一个交点；若$a>1$, x^a与a^x 有两个交点.

这一教学案例的研究, 给了我很大的震撼. 第一、虽然我已经接触 TI 图形计算器有将近一年的时间了, 但对于它的功能还是局限于图形和数据的拟和, 这一案例使我深刻认识到对于 TI 图形计算器不是我了解得不够多, 而是对于它的功能缺乏深入的了解;第二、面对当今数学课程改革, 对数学教师的要求越来越高. 因此, 教师必须对课本有着深入的研究, 对问题有深刻的认识. 要想做一名好老师, 首先就要是个学习型的老师;第三、只有让学生亲历解题的风雨坎坷, 走过从求解到自己提出问题的每一个环节, 才能使学生见到“彩虹”, 真正提高他们的学习能力;第四、课本就是我们的大纲, 要深挖掘课本中的问题. 以课本中的问题为载体, 提高学生的学习能力, 让他们在不断的探索中体味数学的魅力, 从而培养他们学习数学的学习兴趣, 升华学生的思维, 真正做到自主学习.