注重学生学习数学的过程

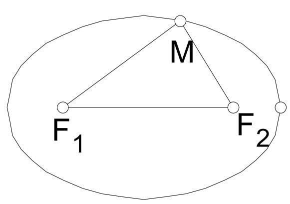
————手持教育技术在数学课程中的作用

崇文教研中心　鲁　彬

随着手持技术的迅猛发展，特别是 TI 手持教育技术的应用，丰富了课堂教学中“做”数学“用”数学的数学活动形式。

它是待开发的学生多样化学习、个性化学习的平台。我们从改进学生的学习方式入手设计教学活动，发现原有教学内容的呈现方式、教师教学的方式、师生互动的方式都在随之发生变化，它能成为学生自主探究，从事创造性学习的认知工具。

一、对以往教学的思考



采用课本（人教社）上给出的画椭圆的方法（如图 1）进行椭圆第一定义的教学，的确不失为一种简捷、清晰的教法，随着教师笔尖的移动一个完美的椭圆图形呈现在学生的　　　图 1
眼前，每每这时，习惯于顺从的学生自然不会发问，“你是怎样发现椭圆的这一规律的”？出于某种教学定势的教师也已认可教科书提供的方法。一道轨迹填空题的教学引起了笔者的思考。“已知⊙O 及⊙O 内一点 A，点 B 是⊙O 上的任意一个点，线段 AB 的垂直平分线 MN 交 OB 于点 P，点 P 的轨迹是______图形”？是椭圆。这一结论对于教师而言再清楚不过了，教师认为学生完成这样的题目应该是轻而易举的事 ，不料学生却小题大做起来。不耐烦的教师指着图说：“这不是椭圆的定义吗”？

正是在那一刻，笔者不禁自问？在椭圆教学中，是应把椭圆的定义作为结论呈现给学生，还是把它作为学生探究知识形成过程的产物？教师虽不能选择教材，但教师可以选择用什么样的教学方法使学生掌握教材内容，教师的责任是如何使椭圆的教学呈现出数学的过程？特别在新技术——图形计算器面前，它可以为我们做什么？笔者做了尝试。

二、化结果为过程的教学

案例一、圆锥曲线

1．把学生带入到椭圆、双曲线第一定义的形成过程之中

教具：学生每人一台 TI-92 plus 图形计算器。

教师：（提出问题）已知⊙O 及⊙O 内一点 A，⊙O 的半径是 R，点 B 是⊙O 上任意一点，AB 的垂直平分线 MN 与 OB 交于点 P，点 P 的轨迹是什么图形？

用图形计算器回答上述问题。

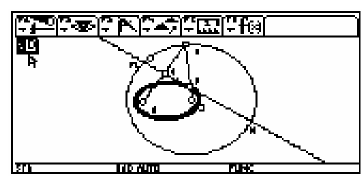


图2

用图形计算器？学生们很兴奋，都连忙操做了起来，不一会儿，学生们看到了在自己操作下计算器屏幕上显示出的动点 P 的轨迹——椭圆。（如图 2）：

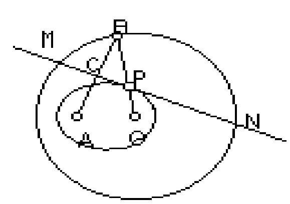
教师：大家有问题吗？

学生：“诶，它为什么是椭圆呢”？

教师：问得很好！什么是椭圆呢？

学生：椭圆是压扁了的圆。（教室里出现了笑声）

教师：（肯定的说）讲的很形象，是从“形”的角度描述的。我们不仅要观察图形的视觉形象，还要注意挖掘图形所隐含的各种知识信息，能否从动点 P 入手，给出椭圆定义。



学生又独立观察、思考起来，教师在学生中巡视，看到了学生在“做数学”时各自处理问题方式，发现多数学生反复盯着动态的椭圆轨迹在看，由于轨迹始终在动，数量关系不便发现。教师意识到，将图形语言转化为符号语言学生遇到了困难。过了一会儿，教师看到部分学生盯着静止不动的椭圆在观察。很快就有十几个学生得到了结论，教师便请了一学生把计算器屏幕上的图形画到

了黑板上（如图 3）　　　　　　　　　　图 3

教师的这一举动引起了学生的注意，图形从动态转化为静态，

数量关系立刻便得清晰起来，学生们渐渐地发现了|PA|+|PO|=R 的结论。

学生：（板书）由题设有：|PB|+|PO|=|OB|=R 的结论。

又因为|PA|=|PB|，所以|PA|+|PO|=R.

教师：思考一下，在上述的观察学习中，你是怎么做的？你从中学到了什么？然后开始交流，……，

说明：因为学生是在教学活动中学会如何学以学习的；教师应关注的是学生真正学到了什么，什么会对学生的头脑产生长期影响......这样，教师在会在教学中不断提高教学水平和教学效益。

评价：因为人生是合作，学生的学习是在学习中学会的；教师所关注的是学生真正学到了什么，什么会对学生的头脑产生长期影响，这样教师的教学就会在教学中提高。

接下来，教师再采用课本上画椭圆的方法进行演示，目的是进一步将符号语言转化为文字语言，即引导学生“读出数学”。当学生看到动点到两个定点的距离之和等于定长的数量关系时，刚刚课堂上所经历的这一关系的发现过程就会在学生的头脑中反映出来，有感性认识做依托，椭圆第一定义的文字表述便在其中了。（定义略）

审视上述教学过程，图形计算器在学生学习过程中究竟起到了什么作用？首先它为学生提供了动手操作的机会，提供了几何直观的观察环境，使学生获得了选择用自己的方式做数学的权利，既有受挫的教训，又有成功的体验，同时，对椭圆图形语言的领悟在椭圆文字语言的表达上得到了充分体现；其次它取代了以往教师用教具演示，并以事先编排好的顺序向学生给出定义的做法。它使教学成为了“以学生发展为本”的“做数学”的过程。

同样，双曲线教学也可如此，教师只要启发学生试着改变⊙O 内一点 A 的位置，让学生观察动点 P 的轨迹，这样便会发现由学生干预的点 A 的变化会引起动 P 的轨迹的变化，当点 A 在⊙O 外时，点 P 的轨迹是双曲线。（如图 4）

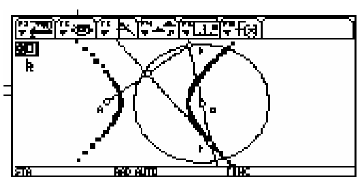


图4

学生自然会问自己，为什么是双曲线？这样双曲线第一定义的形成过程便不

说自明了。

2．把学生带入到椭圆（双曲线、抛物线）第二定义的形成过程之中

多年的教学经验告诉我们，课本（人教社）P76 页的例 3（椭圆的第二定义）的求解过程学生并不感到困难，但对这一命题中题设的由来，特别是对直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 的出现感到困惑。的确，已有了椭圆的第一定义，为什么还要给出椭圆的第二定义呢？椭圆的第二定义是怎么想到的？它和第一定义有什么关系？为了得到例 3 中的 $\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|\frac{a^2}{c}-x|}=\frac{c}{a}.$，进行了如下教学尝试：

评注：此时教师的指导将体现在引导学生挖掘③式的内涵上。因为，学生对其几何意义的理解是椭圆的第二定义能否在学生头脑中形成的关键。

由椭圆的第一定义，设 M（x,y）是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 2c,点 M 与点 F_1、F_2 的距离之和等于正常数 2a，（a＞c＞0）F_1 、 F_2 的坐标是（-c,0），（c,0）. 则 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$……①

若将①式中的 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 移到等号右边，平方、整理得，$a^2-cx\ =a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ……②后，教师引导学生换一个思考问题的角度，在保留 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 的前提下，由学生对②式进行整理，得到

$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|\frac{a^2}{c}-x|}=\frac{c}{a}.$……③。这恰恰是例 3 中的题设。

此时教师的指导将体现在引导学生挖掘③式的内涵上。因为，学生对其几何意义的理解是椭圆的第二定义能否在学生头脑中形成的关键，为此，启发学生在“读出数学”的”读”字上下工夫，是培养学生直观思维意识的具体体现，只有在学生读出“动点 M（x，y）到定点 F_2 的距离与到定直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 的距离之比是常数 $\frac{c}{a}$”时，即完成了对符号语言向文字语言的转化后，对椭圆第二定义的形成过程、对直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 的领悟便在其中了。这时，从纯数学推理的角度看，满足上式的轨

迹是理论上的、抽象的、学生头脑中想象的椭圆，具体到直线与椭圆的位置关系怎样？轨迹的生成过程如何？借用康德的说法：“没有概念的直观是无用的，没有直观的概念是盲目的。”

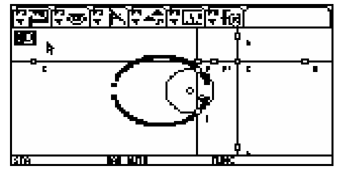


图5

有了图形计算器的支持，教师带领学生亲自动手设计操作，使学生头脑中的椭圆真的在眼前直观的动了起来。（图 5）

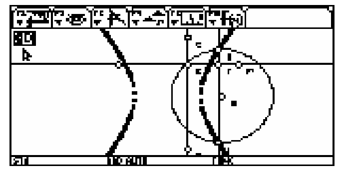


图6

教师：若将①式中的$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$移到等号右边，平方、整理，会有什么结果呢？（课后思考完成）

同理，可进行双曲线第二定义的教学，作出双曲线的轨迹，。（如图 6）。

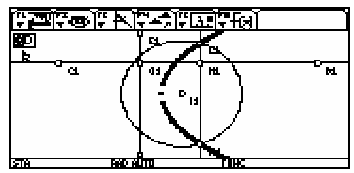


图7

有了上述结论做基础，抛物线定义便可由学生利用图形计算器进行探索。当$0<\frac{c}{a}<1$时，轨迹是椭圆；$\frac{c}{a}>1$ 时，轨迹是双曲线；$\frac{c}{a}=1$呢？轨迹是抛物线，（如图 7）进而进行推理论证。

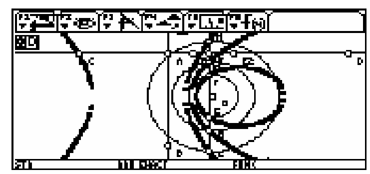


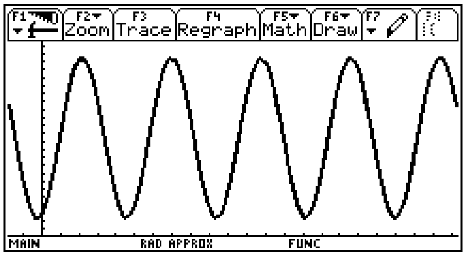
图8

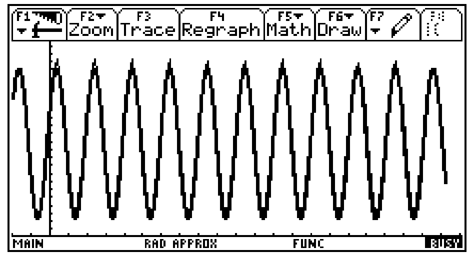
这样图形计算器便将圆锥曲线统一在了第二定义之下。它在给予学生动态直观的感受的同时，还深刻的揭示了圆锥曲线的形成过程及它们之间的内在联系（如图 8）。使学生拥有了“做数学”的权利、兴趣和能力。

案例二：系数A,ω,φ（A,ω>0）对函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的影响。

1．引发学生提出问题

师：前面我们完成了“单摆中小球的位移与时间的关系及交流电中电流强度与时间的关系”两个实验，曲线拟合的结果表明：它们均是正弦曲线型，如图：





相应的解析式是 y=0.049666sin(5.295902x-1.202201)+0.485060;

和 y=0.063873sin(629.043518x-0.542917)+0.448183.

用一般式表示：$y = A\sin(\omega x+\varphi)+b$

师：观察这两个图象有什么明显不同，

生 1：周期有明显的差异，

师：可能和那些因素有关？

生 2：可能与解析式中的系数 $\boldsymbol{A},\omega,\varphi$ 有关，

师;（板书）系数 A,ω,φ（A,ω >0）对函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响。

请同学们按照自己方式选取 A,ω,φ，利用图形计算器观察对 $\boldsymbol{A},\omega,\varphi$ 函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响，（说着，教师发给了每位学生一份实验报告）将 A,ω,φ 的取值及图象记录在实验报告上。

2．让学生在问题情境中获得体验

【教学情景】学生们动手做了起来，教师走到学生之中，看见了学生做数学的思考方式。近 2/3 的学生对 A,ω,φ 取了特殊值，如：取 $A=\omega=\varphi=1$ 得到函数 y=sin(x+1)，用图形计算器画出了图象，并记录在了实验报告上；又改进为 A=2，ω=2，φ=0，即 y=sin2x，……

师：（个别询问）发现规律了吗？

生：（摇摇头）

渐渐的教师发现了教师想要看到的做法：

令 $A=\omega=1,\ \varphi=0,\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{4},\cdots\cdots,$

师：（个别询问）发现规律了吗？

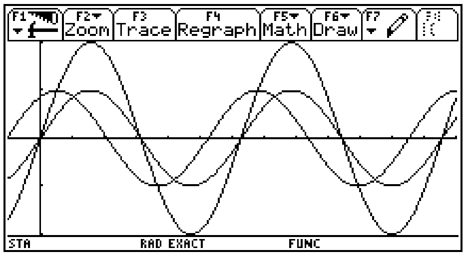
生（点点头）

【说明】此法正是以往教学中教师提供给学生的方法，但考虑到这一方法的发现或者说这一思维方法的形成在学生终生学习中的作用，故而决定让学生在尝试中获得体验，形成认知，发展认知。

师：向同学们谈谈你的想法好吗？

生 1：开始，我令 A=ω=1，$\varphi = \frac{\pi}{3}$, 得到 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$,

令 A=2，$\varpi = 1$，取 $\varphi = 0$，得到 $y = 2\sin x$, 如图：



没有发现规律，（一些学生点着头，有同感。）后来我观察函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中的系数 A, ω, φ，一下就想到了学习二次函数时对系数 a，b，c 的讨论方式，于是我先令 $A = \omega = 1$, 得到 $y = \sin(x + \varphi)$, 分别取 $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, \cdots\cdots$ 观察图象发生的变化，我想系数 φ 的作用应该是使 y=sinx 的图形左、右平移吧！

说明：学生 1 的这番话强烈地震撼着那些因思维受阻而困惑的学生，学生自主探索的作用远远超过老师一遍遍的传教，受挫的经历成为了学生认知发展的基石。此法也正是以往学生教学中教师提供给学生的方法，但考虑到这一方法的发现或者说这一思维方法的形成在学生终生学习的作用，故而决定让学生在尝试中获得体验，形成认知，发展认知。

教师：学生 1 告诉我们了他在研究系数 φ 时的思维方式，那么系数 ϖ, φ 的作用如何呢？

学生 2：令 A=1 $\varphi = 0$, 这时 $y = \sin \varpi x$，取不同的 ϖ 值来研究它的作用。

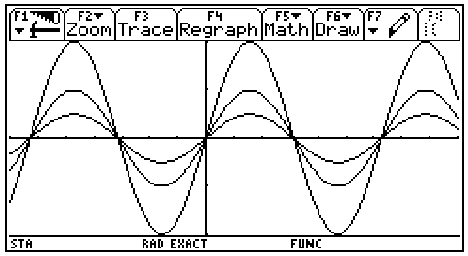
学生 3：令 ω=1，$\varphi = 0$，这时 y=Asinx，取不同的 A 值，去观察图象，发现 A 的作用。

3．学生分组合作探究交流，揭示规律

师：按照上面三位学生提供的研究途径，我把同学们分成三组，分别对系数 A, ω, φ 进行研究。交流开始了，……

【教学设计】教师的作用恰恰是为学生创设内心体验的情境，创设人机对话的机会，创设生生互动的效果，构建互动式教学新模式，使学生利用自己原有认知结构中的有关知识与经验去同化当前学习到的新知识，赋予新知识以某种意义。

学生 4：演示 $y=\sin x, y=2\sin x, y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象，如图：



总结道：当参数 A=2 时，函数 y=2sinx 的图象上所有点的横坐标与函数 y=sinx 图象上所有点的横坐标相同，纵坐标伸长到原来的 2 倍。

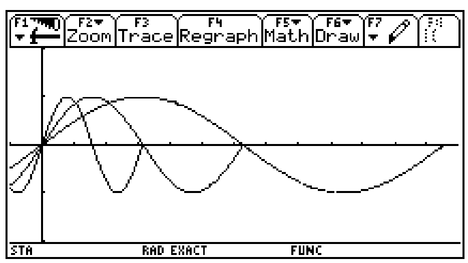
生 B:（立即举手反驳）当曲线与 x 轴相交时，函数值仍是 0，没有发生变化。

（多数同学点头赞成学生 B 的说法，但也有一小部分学生反对意见）

生 C：虽然函数值仍为 0，但 0 的 2 倍还是 0，同样可认为纵坐标伸长到原来的 2 倍。

经学生 C 的分析，立即达成共识，得到了“系数 A 改变图象高度”的结论。

对系数 ω 的讨论过程类似，令 A=1，$\varphi=0$，分别取 $\omega=\frac{1}{2}, 1, 2$，……，如图：



对系数 φ 的讨论从略。

教师的作用恰恰是为学生创造内心体验的情境，创设人机对话的机会，创设生生互动的效果，构建互动式教学模式，使学生利用自己原有认识结构中的有关知识与经验去同化当前学习到的新知识，赋予新知识以某种意义。

图形计算器为“以学生为中心”的数学活动提供了探索平台，为还数学的本来面目，使课堂教学早日回到数学化的轨道上来发挥着积极的促进作用。

参考文献

《图形计算器》第一章　　王长沛　北京大学出版社

《新技术与数学探究活动》　王建明　数学教育学报　2000.5

《关于椭圆教学的几点思考》杨志伦　中学数学教学参考 1998.12

全文摘自中国数学会、北京师范大学编辑的《数学通报》2004 年第 1 期。