

将 TI 用于高中数学实验教学

徐德前

北京宏志中学

内容提要：新的课程标准注重信息技术与数学课程的整合，开展数学实验是信息技术与数学课程教材整合的一个重要手段。TI 图形计算器是数学教学、学习和做数学的强有力的工具，利用 TI 进行数学实验教学可以极大的促进学生的数学思维，使学生亲历数学建构过程，培养创造能力和解决问题的能力，进一步提高数学素养。本文通过一个案例说明利用 TI 进行数学实验的一般过程和步骤，同时阐述了利用 TI 进行数学实验的教学价值以及发展前景。

主题词：数学实验 TI 技术 整合

将 TI 用于高中数学实验教学

提要 新的课程标准注重信息技术与数学课程的整合,开展数学实验是信息技术与数学课程教材整合的一个重要手段。TI 图形计算器是数学教学、学习和做数学的强有力的工具,利用 TI 进行数学实验教学可以极大的促进学生的数学思维,使学生亲历数学建构过程,培养创造能力和解决问题的能力,进一步提高数学素养。本文通过一个案例说明利用 TI 进行数学实验的一般过程和步骤,同时阐述了利用 TI 进行数学实验的教学价值以及发展前景。

一、问题的提出

著名数学家和教育家 G·波利亚曾精辟地指出:“数学有两个侧面,一方面它是欧几里德式的严谨科学,从这个方面看,数学象是一门系统的演绎科学;但另一方面,创造过程中的数学,看起来却象一门试验性的归纳科学。”要全面提高学生的数学素质,就要在数学教学中充分体现它的两个侧面,即重视数学内容形式化、抽象化的一面,又要重视数学发现、数学创造过程中具体化、经验化的一面,而后者对数学基础教育显得更为重要。但在目前的形势下,数学教学(尤其平面几何)往往是片面强调形式化的逻辑推导和形式化的结果。而对数学发现过程的展示和数学直观性背景注意较少,使充满美感和生机勃勃的数学丧失了它的本来面目。为了改变这一状况,我国在 2003 年颁布的《普通高中数学课程标准》(实验)课程的基本理念第 7 条中指出:强调本质,注意适当形式化。同时基本理念第 9 条中提到:注重信息技术与数学课程的整合。现代信息技术的广泛应用正在对数学课程内容、数学教学、数学学习等方面产生深刻影响。高中数学课程应提倡实现信息技术与课程内容的有机整合(如把算法融入到数学课程的各个相关部分),整合的原则是有利于学生认识数学的本质。高中数学课程应提倡利用信息技术来呈现以往教学中难以呈现的课程内容,在保证笔算训练的前提下,尽可能使用科学型计算器、各种数学教育技术平台,加强数学教学与信息技术的结合,鼓励学生运用计算机、计算器等进行探索和发现。开展数学实验是信息技术与数学课程教材整合的一个重要形式。

学习数学和做数学(Doing Mathematics)是探索数学现象,是研究、发现、困惑最终理解的过程,也是努力寻找解决某些问题的捷径,从而提出更多的问题,给出更多的可能性的过程。数学课程要反映信息时代新的教学技术对数学教育的推动。数学的创新教育,需要数学实验、猜想。越来越多的事实表明,数学实验在数学教学和数学学习中可以起着非常重要的作用,它们对于理解数学和应用数学都是重要的。TI 图形计算器作为一种新型的数学实验工具,它具备符号代数系统、几何操作系统、数据分析系统等,可以直观地绘制各种图形,并进行动态演示、轨迹跟踪。TI 图形计算器是教学、学习和做数学的强有力的工具。它为数学思想提供可视化的图象,使组织和分析数据容易实现,计算更有效和准确,它们可以支持学生在数学各个领域的研究,比如几何、统计、代数、测量和数。学生可以集中精力于做出选择、反思、推理和问题解决。更重要的是由于 TI 图形计算器的便携性、灵活性为数学实验教学提供了可能。

二、利用 TI 进行数学实验教学的基本任务和意义

教学技术的发展使我们有了图形计算器，TI 技术给我们带来了生动形象的数学，不仅简化了复杂的计算过程，更以其图像的快捷性和直观性为广大师生进一步探索数学提供了必要的条件。利用 TI 图形计算器作为数学实验教学的工具，在每个数学实验中，任务是：

- (一) 利用 TI 计算器给出问题的实例——同时提出自己的问题。
- (二) 完成相应的实验，努力发现与所研究问题中反映出的规律。在实验过程中发现了怎样的规律？
- (三) 对实验的结果做出清楚的描述。
- (四) 基于观察给出猜想。哪些规律反映了真实的现象，而不是所选例子偶然的规律性。
- (五) 根据实验的现象，通过数学上的分析及可能的数学证明，给出支持该猜想的论证，排除偶然的规律性。

在数学实验中，学生可以利用 TI 技术进行观察、分析、对比、归纳、建立关系，处理数据、发现规律。TI 迅速的计算和作图能力，可以为抽象思维提供直观模型，数学关系的静态结构表现为时空中的动态过程，数学问题的难度可以得到降低。TI 技术的存在、强大的多功能性，使得有可能和必要再次审视学生应学什么样的数学，以及如何使得学生最优地学习数学。

数学实验教学不是直接将现成的结论教给学生，而是根据数学思想发展脉络，创造问题情景，充分利用实验手段，设计系列问题增加辅助环节，从直观、想象到发现、猜想，然后给出验证及理论证明，从而使学生亲历数学建构过程，逐步掌握认识事物、发现真理的方式、方法，培养创造能力，提高数学素养，共享数学发现的快乐与挫折，醉心于对数学现象的探索。这样在培养学生独立解决问题能力的同时，激发他们进一步学好数学的愿望，促成数学教学的良性循环，将 TI 用于高中数学实验教学是朝着这个方向前进的一种努力。

三、利用 TI 进行数学实验教学的案例

对指数函数与其反函数图像交点个数的研究

(以下用 T 代表教师，S 代表学生)

T: 前面我们学习了指数函数和对数函数，我们知道函数 $y = a^x$ 与其函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 互为反函数，本节课我们研究一下对指数函数与其反函数图像交点个数。

S1: $0 < a < 1$ 时显然只有一个交点，如函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (图 1)。

S2: 我发现 $a=2$ 时指数函数 $y = 2^x$ 与其反函数 $y = \log_2 x$ 图像无交点 (图 2)。

S3: 补充一个结果，我发现 $a=\sqrt{2}$ 时指数函数 $y=(\sqrt{2})^x$ 与其反函数 $y = \log_{\sqrt{2}} x$ 图像有 2 个交点 (图 3)。

S4: 我来小结一下： $0 < a < 1$ 时指数函数与其反函数图像只有一个交点，如函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ； $a > 1$ 时有两种情况：2 个交点，如 $y=(\sqrt{2})^x$ 与 $y = \log_{\sqrt{2}} x$ ；或者无交点，如 $y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$ 。

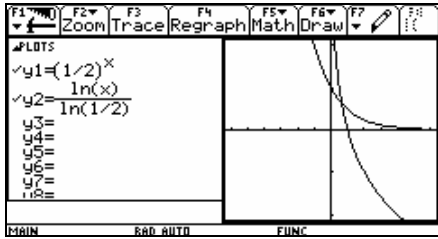


图 1

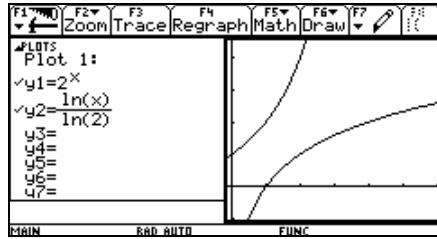


图 2

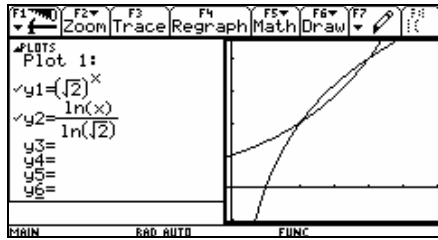


图 3

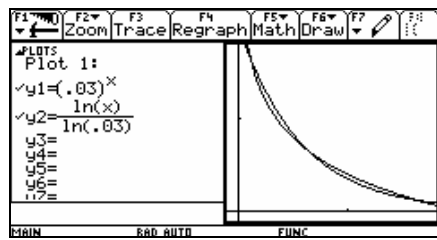


图 4

T: 很好!我们大家利用 TI 图形计算器对上述问题作了不错的研究,但是事实真的是这样吗? 指数函数与其反函数图像可能不可能有三个交点呢?

.....

S5: 可能的。取 $a=0.03$ 时可以看到函数 $y = a^x$ 与其反函数 $y = \log_a x$ 的图像有 3 个交点 (如图 4)。

T: 伟大的发现! 这表明当 $0 < a < 1$ 时存在某一个数 a 使得指数函数 $y = a^x$ 与其反函数 $y = \log_a x$ 的图像有 3 个交点。但是 a 的值非常小, 交点的个数不易观察, 考虑一下怎么处理使得交点个数容易观察呢?

S6: 可以转化为讨论函数 $y = a^x - \log_a x$ ($0 < a < 1$) 与 x 轴的交点的个数 (图 5)。如图函数 $y = 0.03^x - \log_{0.03} x$ 与 x 轴有三个交点。

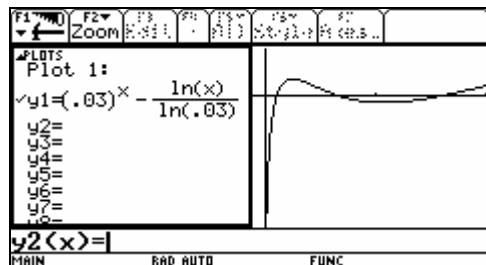


图 5

S7: 也可以利用 TI 的解方程功能, 如图解方程 $0.03^x = \log_{0.03} x$ 可以发现方程有三个根。这也验证了刚才的结论。

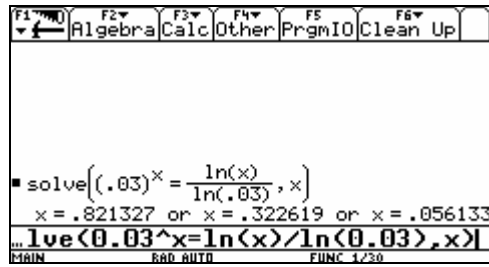


图 6

进一步还可以发现 $0 < a < 0.0659$ (近似值) 时函数 $y = a^x$ 与其反函数 $y = \log_a x$ 的图像有 3 个交点, $0.0659 < a < 1$ 时函数 $y = a^x$ 与其反函数 $y = \log_a x$ 的图像有 1 个交点。

T: 好的, 现在对 $0 < a < 1$ 时的交点情况已经讨论的比较清楚了。那么对于 $a > 1$ 是否只有两个交点或没有交点这两种情况呢? 能否存在某一个数 a 使得函数 $y = a^x$ 与其反函数 $y = \log_a x$ 有且仅有 1 个交点呢? 仿照前面的步骤可以把这个问题转化为研究方程 $a^x = \log_a x$ ($a > 1$) 是否有 1 个解的问题。

下面是同学们利用 TI 图形计算器解方程的功能对此进行探讨, 对底数 a 可以取不同的值进行尝试, 实验得到的数据如下表:

底数 a	方程的根 x_1	方程的根 x_2	根的个数
1.45	-----	-----	0
$\sqrt{2}$	4	2	2
1.44	3.12330671244	2.39381174820	2
1.444	2.86049946489	2.58747028253	2
1.44466786	2.71844940243	2.71811427122	2
1.44466786101	-----	-----	0
1.4446678610075	2.71828980572	2.71827386963	2
1.4446678610085	2.71828778266	2.71827590454	2
1.4446678610095	2.71828452375	2.7182791172	2
1.4446678610099	-----	-----	0
1.4446678610098	2.71828233243	2.71828233243	1

T: 对这个表格的数据大家发表一下看法。

(表格最后一行的结果是由于计算器的精度不够导致的)

S8: 通过对上面数据的观察可以发现方程 $a^x = \log_a x$ ($a > 1$) 解越来越接近于自然底数 e ,

因此可以猜想当 $a > 1$ 时关于 x 的方程 $a^x = \log_a x$ 若只有一个解则这个解是 $x=e$, 而指数函数

$y = a^x$ 与其反函数 $y = \log_a x$ 的图像如果有且仅有 1 个交点, 则这个交点必在直线 $y=x$ 上,

所以指数函数 $y = a^x$ 与其反函数图像交点的坐标为 (e, e) 。此时 a 的值是关于 a 的方程

$a^e = \log_a e = e$ 的解。不难解出 $a = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.4446678610098$ 。和观察的结果符合的很好。

T: 理论上也可以证明这个结果, 证明过程大家可以了解。由于交点的坐标在直线 $y=x$ 上,

所以交点的坐标满足 $a^x=x$ ①, $\log_a x=x$ ②, 对两个式子两边分别对 x 取导数则有 $a^x \ln(a) = 1$

③, $\frac{1}{x \ln(a)} = 1$ ④, 由④得 $x = \frac{1}{\ln(a)}$ 代入到③有 $a^{\frac{1}{\ln(a)}} \ln(a) = 1$, 两边取以 e 为底的对数有

$1 + \ln(\ln(a)) = 0$, 解得 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 。那么到此我们可以怎么来叙述指数函数与其反函数图像交点个数的结论。

S8: 正确的结果应是:

当 $0 < a < 0.0659$ (理论上可以证明是 $\frac{1}{e^e}$ 的近似值) 时函数 $y = a^x$ 与其反函数 $y = \log_a x$

的图像有 3 个交点, $0.0659 < a < 1$ 时函数 $y = a^x$ 与其反函数 $y = \log_a x$ 的图像有 1 个交点。

当 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ 时, 指数函数 $y = a^x$ 与其反函数图像有两个交点。当 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时指数函数 $y = a^x$ 与其反函数图像有且仅有一个交点。当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时指数函数 $y = a^x$ 与其反函数图像没有交点。

T: 利用这次讨论顺便可以纠正大家对函数一个错误的认识: 函数与其反函数的交点一定在直线 $y=x$ 上, 上面的例子已经否定了这个认识。

通过这个案例可以看到, 利用 TI 构建的高中数学实验改变了传统教学中学生围着老师转的教学模式, 学生从以往的听众变成了积极的参与者, 真正成为课堂的主体。学生反映在课堂上使用 TI 图形计算器特别有意思, 大家可以做实验互相讨论, 积极思维, 互相协作、大胆猜想, 踊跃发表自己的观点, 参与感比较强, 在实验中学习, 数学课也不枯燥了。由于 TI 具有探索的功能, 利用 TI 构建的高中数学实验为学生营造了一个“探索数学”, “体验数学”的环境, 把原来的数学学习过程转变成为自己学习数学的过程, 使学生体会到知识产生的过程, 从而对数学有更深刻的认识, 产生更深刻的求知欲, 也进一步激发了学生学习数学的积极性。同时他们探索研究问题的基本方法和基本素养也在实验中得到提高, 有利于学生逐步培养科学研究的态度和意识, 利用 TI 学生可以充分地参与探究性活动, 主动的建构知识, 不仅能增强学生的动手实验能力, 同时还能使学生体会到归纳、猜想等合情推理重要的数学思想、方法, 对于激发学生学习数学的主动性与积极性是非常有好处的。这样不仅可以培养学生分析问题、解决问题的能力 and 创造精神, 同时也体现了现代的文化气息和人文精神, 体现了信息时代数学教学的方向, 有助于学生在学习和实践的过程中形成和发展数学应用的意识。这一点在《普通高中实验教科书信息整合本》提供了大量的与实际生活有关系的实例中可以得到体现。

四、 数学实验课的教学价值

由上面的叙述可以看出利用 TI 开展数学实验课是促进学生主动学习的一种好的形式。

从学生角度来看, 通过数学实验课的教学, 学生是非常乐于研究和探索的, 他们的创造

力得到了充分的发挥,切身体会到数学发现的快乐。在数学实验中学生的数学学习活动不局限于接受、记忆、模仿和练习,还应倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习数学的方式。这些方式有助于发挥学生学习的主动性,使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程。同时为学生形成积极主动的、多样的学习方式进一步创造有利的条件,以激发学生的数学学习兴趣,鼓励学生在 学习过程中,养成独立思考、积极探索的习惯。通过各种不同形式的自主学习、探究活动,让学生体验数学发现和创造的历程,发展他们的创新意识。

从教师的角度来看,用实验的方式教授数学是对传统数学教学方式的有益补充,学生学习数学有一个不断摸索的过程。我们应当为他们提供这样一种环境。而且,教师在学习数学时也需要接受这种训练,这样在今后的教学中,对学生按自己的想法解决问题时提出的意外的猜想,老师就能够给予建设性的回答。同时教师可以按自己的个性特征、教学习惯、教学特点灵活选择,实现特色教学。

从教育管理者的角度来看,通过实验形式的教学,学生做事的主动性、创造性和协作精神得到很大提高。教师可以更好的进行教学研究,提高教育教学水平。学校应该为教师和学生提供良好的教学条件以推动教学的改革和发展。

五、利用 TI 构建高中实验教学的发展前景

利用 TI 构建高中数学实验教学是对传统数学教学的发展和充实,是培养学生实践能力和探索精神能力的途径,也是对教师传统教育观念的挑战。

把 TI 数学实验教学应用于数学课堂和学生的自主学习中,应该注意以下几个方面。

- (1) 通过恰当的使用 TI 技术,学生可以更深入地学到更多的知识。
- (2) TI 技术不应该作为基本理解和直觉的替代物。
- (3) TI 技术也应该作为培养这种理解和直觉的工具。
- (4) 在数学教学计划中,在丰富学生的数学学习的目的下, TI 技术应该广泛和负责任的使用。

我们知道演绎与数学猜想、“数学实验”、数学活动和数学直观互相联系。演绎在传统的数学教育中占有绝对的地位,这个地位在较长的时间内也许还将是主流。但是数学教育的改革使得“数学实验”这个话题进入了人们的视野,与此同时人们对数学猜想和推理与证明的认识也在不断更新和扩展。这就使得我们面临如何处理它们之间相互关系的问题。

比如我们是否允许一个没有严格证明的学生的数学猜想的存在,并给予适当而积极的评价,是否允许“实验几何”的存在。如果高中数学课程设计希望学生在最后的三年基础教育中获得更多更有价值的数学思想和方法,那么就找到演绎的数学内容、方法与以 TI 技术包括其它教育技术为实验背景的数学猜想、数学直观之间的平衡点。

在课堂上构建以 TI 技术支持的数学实验这种教学方法将会更加显示其在素质教育和创新教育中的独特作用,有助于研究性学习的开展,值得大力推广。因此 TI 数学实验教学具有广阔的发展前景。

参考文献:

- 1、 Mount Holyoke College laboratories in Mathematical Experimentation , Springer -Verlag New York Ltd.,1997。
- 2、 孔令军、赵红革:浅谈数学实验教学,数学通报.2000.8。
- 3、 李晋渊、刘坤:数学实验课的教学价值,数学通报.2000.10。
- 4、 《国家高中数学课程标准》制订组.《高中数学课程标准》的框架设想,中小学教材教学,2002.4。
- 5、 中华人民共和国教育部:《普通高中数学课程标准》(实验),人民教育出版社,2003年4月第1版, P5。