数列的教学研究

华东师大一附中　区志华

随着社会的进步和信息技术的迅猛发展，当前的上海数学教育改革，正努力通过利用现代信息技术，构建基于计算机、计算器（包括科学计算器、函数型计算器和图形计算器）和信息网络的数字化数学活动平台（DIMA），使之成为学生学习的有效手段和工具，成为获取学习资源和开展学习交流的广阔平台.

图形计算器的各项功能与数学教学内容关系密切，不仅便于学生自主进行的直观体验、形象解答、猜想归纳和探索实践，而且可以实现数学问题的情景化、解决途径的多样化和学习过程的活动化.

数列不仅是数学的基础知识之一，蕴含着类比、猜想、归纳、递归等丰富的数学思想方法，而且数列知识在日常生活、社会实践中有着广泛的应用. 因此，将图形计算器技术运用于数列的学习过程，借助图形计算器的数列编辑、数列图像、数列运算表等功能，以及递推公式直接运用和函数拟合回归的技术特点，可以使学生在有效的尝试猜想、合理归纳、简化运算、验证运算中，学习数列的基本知识，增添解决问题、探究问题的途径，从而体验其中的数学思想和方法，增强数列知识的综合运用能力.

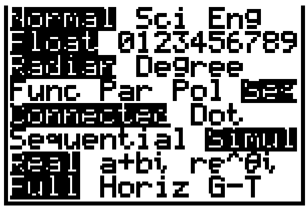
一、图形计算器之数列常用技术

利用图形计算器的数列模式中，关于数列的编辑、图像、数组和函数拟合等技术手段，我们可以采用直观、形象的方法，通过列举、归纳、猜想、验证及演绎证明，实现对数列有关概念、公式的认识与理解.

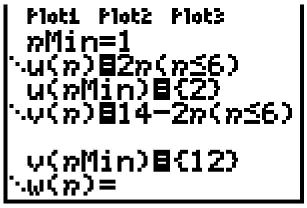
〖例 1〗 数列 2，4，6，8，10，12 的通项公式为 $a_n = 2n\ (1 \le n \le 6)$

则其图像是：

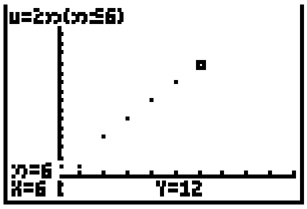
按 MODE ，选中第四行的第 4 项 Seq (Sequence) , 进入数列状态.



按$\boxed{\text{Y=}}$，进入数列编辑器，输入数列的通项公式，其中 u（nMin）表示数列的首项.



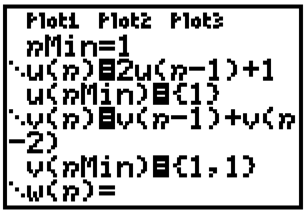
按$\boxed{\text{TRACE}}$，显示数的图像并跟踪数据.



〖例 2〗 根据数列$\{a_n\}$的递推公式，写出该数列的前 7 项：

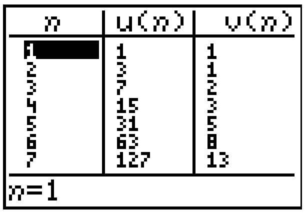
（1）$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + 1\ (n \geq 2); \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 3). \end{cases}$

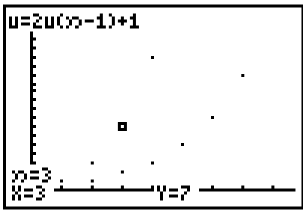
按$\boxed{\text{Y=}}$键，输入两个数列的递推公式. 其中，u（nMin）= 1 表示第一个数列的首项，v（nMin）= $\{1, 1\}$ 表示第二个数列的前两项，前者表示 a_2，后者表示 a_1.

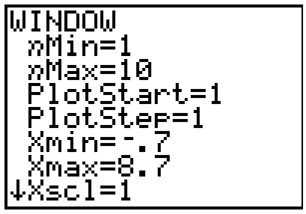


按$\boxed{\text{2nd}}$[TABLE]键，用列表方式，显示数列的各项. 或者按$\boxed{\text{TRACE}}$键，显示数列的图像.

注：图像显示时，只能显示$\boxed{\text{WINDOW}}$中 nMax 的数量的项.

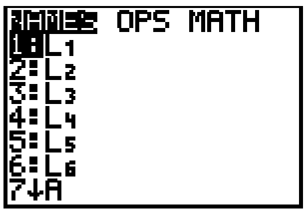






<u>数组 LIST 的菜单内容</u>

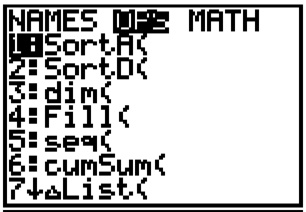
按 $\boxed{\text{2nd}}$ ［ LIST ］ 得到右图.

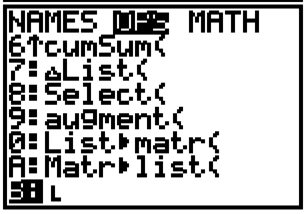


数组名　NAMES

选项　OPS

1:　　升值排列法





2：　　降值排列法

3：　　维数

4：　　用数填充

5：　　数列生成数组

6：　　前 n 项部分和

7：　　相邻项之差

8：　　选择数据

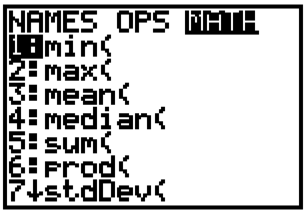
9：　　扩充数组

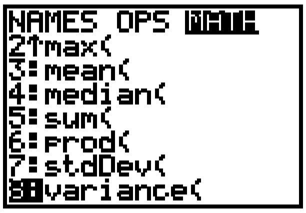
0：　　数组化矩阵

A：　　矩阵化数组

B：　　数组标志

数学计算　MATH





1：　　最小值

2：　　最大值

3：　　平均值

4：　　中位数

5：　　和

6：　　积

7：　　标准差

8：　　方差

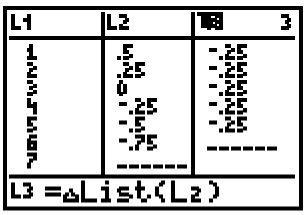
〖例 3〗　已知以下数列，运用图形计算器，观察其相邻两项之间的关系：

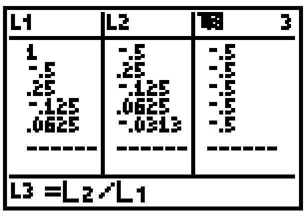
（1）$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \cdots\cdots$；

（2）1，$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots\cdots$.

写出它们的一个递推公式.

解：



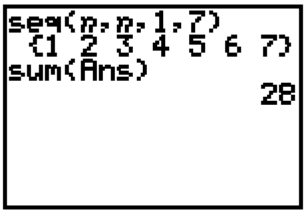


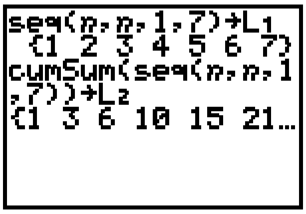
递推公式：（1）$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} - \dfrac{1}{4} \quad (n \geq 2) \end{cases}$；　（2）$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = -\dfrac{1}{2} a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$.

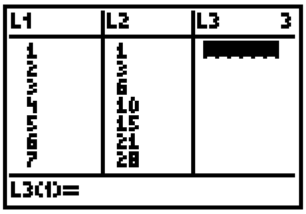
〖例 4〗 计算数列 1，2，3，4，5，6，7 的和.

方法 1：

按$\boxed{\text{2nd}}$[LIST]，打开 OPS 5：seq(，建立数列；再按$\boxed{\text{2nd}}$[LIST]，打开 MATH 5：sum(，得到数列的和.





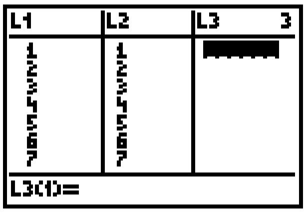


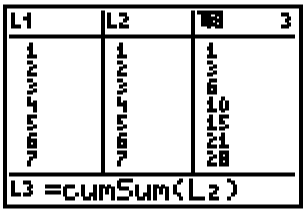
方法 2：

按$\boxed{\text{2nd}}$[LIST]，打开 OPS 5：seq(赋予 L_1，则数组 L_1 就是项数；再按$\boxed{\text{2nd}}$[LIST]，打开 OPS 6：cumSum(，赋予 L_2，则数组 L_2 就是该数列的前 n 项和组成的数列 $\{S_n\}$；按$\boxed{\text{STAT}}$，打开 1：Edit，得到前 7 项和为 28.

方法 3：

在数组 L3 中，建立前 n 项和的数列 $\{S_n\}$，其第 7 项就是前 7 项的和.





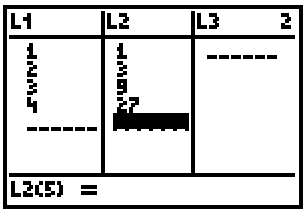
二、图形计算器之数列教学探究

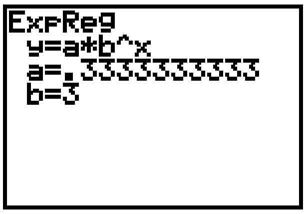
在数列学习过程中，我们可以利用图形计算器直观运算、图表功能、数列通项公式、递推公式和求和公式的直接使用以及函数拟合功能等，加深对数列基本知识的理解和掌握，拓展数列问题解决的途径，积极形成观察、分析、抽象、归纳的探究问题的思维方法，使之用于解决数列的实际问题.

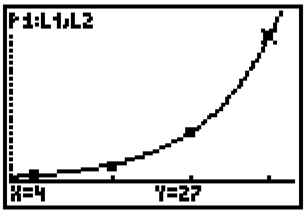
〖例 5〗 已知一个数列的前 4 项为 1，3，9，27，写出它的一个通项公式.

解：利用递推公式得数列$\{a_n\}$的一个通项公式是 $a_n=3^{n-1}$.

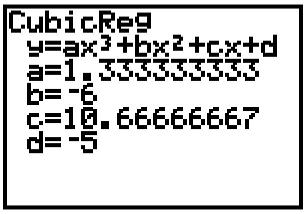
利用函数拟合功能，当选择指数函数型时，得该数列的一个通项公式为$a_n=3^{n-1}$；

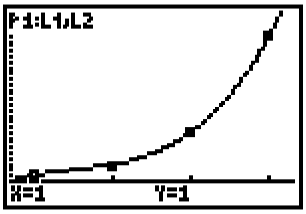


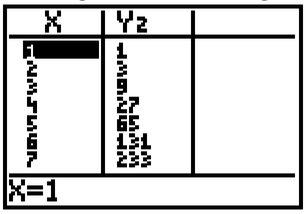




当选择三次函数型时，得该数列的一个通项公式为$a_n=\frac{4}{3}n^3-6n^2+\frac{32}{3}n-5$.



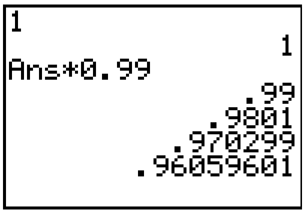


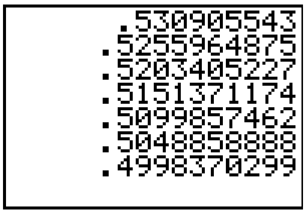


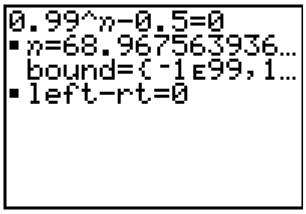
由此可知，对于给出数列的某些项，其通项公式是不唯一的.

〖例 6〗某种物质因其具有放射性，而不断地变化为其他物质，每经过一年其残留的这种物质为原来的 99%，那么这种物质的半衰期（放射性物质衰变为原来的一半的时间）为多长？（精确到 1 年）

解：



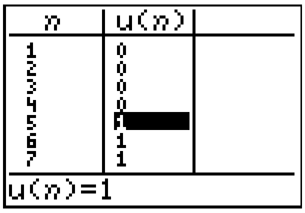




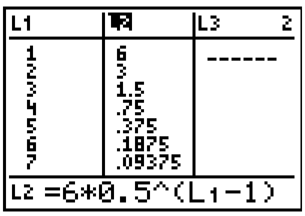
〖例 7〗 已知等比数列 6，3，1.5，……，求使得该等比数列前n项和S_n大于 11.5 的最小的n的值.

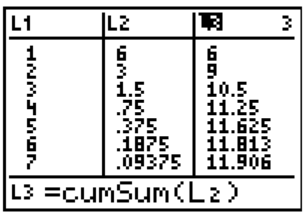
解：由题意，$q=\frac{1}{2}$，有$S_n=\frac{6(1-0.5^n)}{1-0.5}>11.5$，

得最小的n的值为 5.



解 2：





〖练习〗

1.（1）如果$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=-5,\ a_2=-1$，求a_6和a_8的值；

（2）如果$\{a_n\}$是等比数列，且$a_4=1,\ a_5=-5$，求a_8和a_9的值.

2．已知等差数列$\{a_n\}$，$a_1=31,\ d=-2$，求：数列$\{\ |a_n|\ \}$的前 30 项和.

3．从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业．根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少 20%．本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 25%．

请问：至少经过多少年投资可以见效？（旅游业的总收入超过总投入）

〖问题推广〗

探索 1：15 年以后，投资将获得怎样的回报？

探索 2：该地区今后每年的旅游业收入和投入之比将会发生怎样的变化？

4．一个小型林场原先种植有 4000 棵树．从今年起，林场计划每年砍伐 15%以获取经济效益，同时又补种上 1000 棵树．若干年后，这片林场会由此而消失吗？若会消失，将在几年后？若不会消失，那么林场的规模会稳定下来吗？如果会稳定下来，又至少需要多少时间？稳定在什么规模上？

5．设备改造方案的选择：

如果现在部门上报两个技术改造方案：

方案 I　投资 100 万元购置新设备，每年末可增收 20 万元

方案 II　投资 80 万元更新部分装置，可节约每年初的 16 万元检修费

这些设备使用期均为 8 年，银行复利年利率 4%，如何决定采用哪个方案？