

数列的教学研究

华东师大一附中 区志华

随着社会的进步和信息技术的迅猛发展，当前的上海数学教育改革，正努力通过利用现代信息技术，构建基于计算机、计算器（包括科学计算器、函数型计算器和图形计算器）和信息网络的数字化数学活动平台（DIMA），使之成为学生学习的^{有效}手段和工具，成为获取学习资源和开展学习交流的广阔平台。

图形计算器的各项功能与数学教学内容关系密切，不仅便于学生自主进行的直观体验、形象解答、猜想归纳和探索实践，而且可以实现数学问题的情景化、解决途径的多样化和学习过程的活动化。

数列不仅是数学的基础知识之一，蕴含着类比、猜想、归纳、递归等丰富的数学思想方法，而且数列知识在日常生活、社会实践中有着广泛的应用。因此，将图形计算器技术运用于数列的学习过程，借助图形计算器的数列编辑、数列图像、数列运算表等功能，以及递推公式直接运用和函数拟合回归的技术特点，可以使学生在有效的尝试猜想、合理归纳、简化运算、验证运算中，学习数列的基本知识，增添解决问题、探究问题的途径，从而体验其中的数学思想和方法，增强数列知识的综合运用能力。

一、图形计算器之数列常用技术

利用图形计算器的数列模式中，关于数列的编辑、图像、数组和函数拟合等技术手段，我们可以采用直观、形象的方法，通过列举、归纳、猜想、验证及演绎证明，实现对数列有关概念、公式的认识与理解。

【例 1】 数列 2, 4, 6, 8, 10, 12 的通项公式为 $a_n = 2n$ ($1 \leq n \leq 6$)

则其图像是：

按 **MODE**，选中第四行的第 4 项

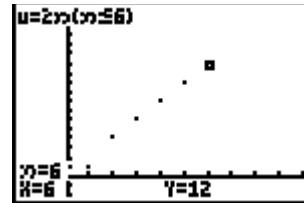
Seq (Sequence)，进入数列状态。



按 $\boxed{Y=}$ ，进入数列编辑器，输入数列的通项公式，其中 $u(nMin)$ 表示数列的首项。

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n) 2n(n≤6)
u(nMin) 2
v(n) 14-2n(n≤6)
v(nMin) 12
w(n)=
```

按 \boxed{TRACE} ，显示数的图像并跟踪数据。



【例 2】根据数列 $\{a_n\}$ 的递推公式，写出该数列的前 7 项：

$$(1) \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2); \end{cases} \quad (2) \begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3). \end{cases}$$

按 $\boxed{Y=}$ 键，输入两个数列的递推公式。其中， $u(nMin)=1$ 表示第一个数列的首项， $v(nMin) = \{1, 1\}$ 表示第二个数列的前两项，前者表示 a_2 ，后者表示 a_1 。

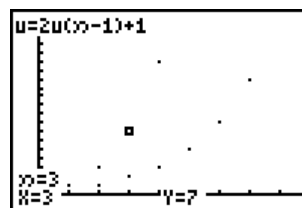
```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n) 2u(n-1)+1
u(nMin) 1
v(n) v(n-1)+v(n-2)
v(nMin) 1,1
w(n)=
```

按 $\boxed{2nd}[TABLE]$ 键，用列表方式，显示数列的各项。或者按 \boxed{TRACE} 键，显示数列的图像。

注：图像显示时，只能显示 \boxed{WINDOW} 中 $nMax$ 的数量的项。

n	u(n)	v(n)
1	1	1
2	3	1
3	7	2
4	15	3
5	31	5
6	63	8
7	127	13

n=1



```
WINDOW
nMin=1
nMax=10
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=-.7
Xmax=8.7
Xscl=1
```

数组 LIST 的菜单内容

按 $\boxed{2nd}[LIST]$ 得到右图。

数组名 NAMES

选项 OPS

1: 升值排列法

```
NAMES OPS MATH
1: L1
2: L2
3: L3
4: L4
5: L5
6: L6
7: A
```

- 2: 降序排列法
- 3: 维数
- 4: 用数填充
- 5: 数列生成数组
- 6: 前 n 项部分和
- 7: 相邻项之差
- 8: 选择数据
- 9: 扩充数组
- 0: 数组化矩阵
- A: 矩阵化数组
- B: 数组标志

```

NAMES OPS MATH
1: SortA(
2: SortD(
3: dim(
4: Fill(
5: seq(
6: cumSum(
7: ΔList(

NAMES OPS MATH
6: ↑cumSum(
7: ΔList(
8: Select(
9: augment(
0: List→matr(
A: Matr→list(
B: L

```

数学计算 MATH

- 1: 最小值
- 2: 最大值
- 3: 平均值
- 4: 中位数
- 5: 和
- 6: 积
- 7: 标准差
- 8: 方差

```

NAMES OPS MATH
1: min(
2: max(
3: mean(
4: median(
5: sum(
6: Prod(
7: ↓stdDev(

```

```

NAMES OPS MATH
2: ↑max(
3: mean(
4: median(
5: sum(
6: Prod(
7: stdDev(
8: variance(

```

【例 3】 已知以下数列，运用图形计算器，观察其相邻两项之间的关系：

(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \dots$;

(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$.

写出它们的一个递推公式.

解：

L1	L2	L3	3
1	0.25	-0.25	
2	0	-0.5	
3	-0.25	-0.75	
4	-0.5	-1	
5	-0.75	-1.25	
6	-1	-1.5	
7	-1.25	-1.75	
8	-1.5	-2	
9	-1.75	-2.25	
10	-2	-2.5	
11	-2.25	-2.75	
12	-2.5	-3	
13	-2.75	-3.25	
14	-3	-3.5	
15	-3.25	-3.75	
16	-3.5	-4	
17	-3.75	-4.25	
18	-4	-4.5	
19	-4.25	-4.75	
20	-4.5	-5	
21	-4.75	-5.25	
22	-5	-5.5	
23	-5.25	-5.75	
24	-5.5	-6	
25	-5.75	-6.25	
26	-6	-6.5	
27	-6.25	-6.75	
28	-6.5	-7	
29	-6.75	-7.25	
30	-7	-7.5	
31	-7.25	-7.75	
32	-7.5	-8	
33	-7.75	-8.25	
34	-8	-8.5	
35	-8.25	-8.75	
36	-8.5	-9	
37	-8.75	-9.25	
38	-9	-9.5	
39	-9.25	-9.75	
40	-9.5	-10	
41	-9.75	-10.25	
42	-10	-10.5	
43	-10.25	-10.75	
44	-10.5	-11	
45	-10.75	-11.25	
46	-11	-11.5	
47	-11.25	-11.75	
48	-11.5	-12	
49	-11.75	-12.25	
50	-12	-12.5	
51	-12.25	-12.75	
52	-12.5	-13	
53	-12.75	-13.25	
54	-13	-13.5	
55	-13.25	-13.75	
56	-13.5	-14	
57	-13.75	-14.25	
58	-14	-14.5	
59	-14.25	-14.75	
60	-14.5	-15	
61	-14.75	-15.25	
62	-15	-15.5	
63	-15.25	-15.75	
64	-15.5	-16	
65	-15.75	-16.25	
66	-16	-16.5	
67	-16.25	-16.75	
68	-16.5	-17	
69	-16.75	-17.25	
70	-17	-17.5	
71	-17.25	-17.75	
72	-17.5	-18	
73	-17.75	-18.25	
74	-18	-18.5	
75	-18.25	-18.75	
76	-18.5	-19	
77	-18.75	-19.25	
78	-19	-19.5	
79	-19.25	-19.75	
80	-19.5	-20	
81	-19.75	-20.25	
82	-20	-20.5	
83	-20.25	-20.75	
84	-20.5	-21	
85	-20.75	-21.25	
86	-21	-21.5	
87	-21.25	-21.75	
88	-21.5	-22	
89	-21.75	-22.25	
90	-22	-22.5	
91	-22.25	-22.75	
92	-22.5	-23	
93	-22.75	-23.25	
94	-23	-23.5	
95	-23.25	-23.75	
96	-23.5	-24	
97	-23.75	-24.25	
98	-24	-24.5	
99	-24.25	-24.75	
100	-24.5	-25	
101	-24.75	-25.25	
102	-25	-25.5	
103	-25.25	-25.75	
104	-25.5	-26	
105	-25.75	-26.25	
106	-26	-26.5	
107	-26.25	-26.75	
108	-26.5	-27	
109	-26.75	-27.25	
110	-27	-27.5	
111	-27.25	-27.75	
112	-27.5	-28	
113	-27.75	-28.25	
114	-28	-28.5	
115	-28.25	-28.75	
116	-28.5	-29	
117	-28.75	-29.25	
118	-29	-29.5	
119	-29.25	-29.75	
120	-29.5	-30	
121	-29.75	-30.25	
122	-30	-30.5	
123	-30.25	-30.75	
124	-30.5	-31	
125	-30.75	-31.25	
126	-31	-31.5	
127	-31.25	-31.75	
128	-31.5	-32	
129	-31.75	-32.25	
130	-32	-32.5	
131	-32.25	-32.75	
132	-32.5	-33	
133	-32.75	-33.25	
134	-33	-33.5	
135	-33.25	-33.75	
136	-33.5	-34	
137	-33.75	-34.25	
138	-34	-34.5	
139	-34.25	-34.75	
140	-34.5	-35	
141	-34.75	-35.25	
142	-35	-35.5	
143	-35.25	-35.75	
144	-35.5	-36	
145	-35.75	-36.25	
146	-36	-36.5	
147	-36.25	-36.75	
148	-36.5	-37	
149	-36.75	-37.25	
150	-37	-37.5	
151	-37.25	-37.75	
152	-37.5	-38	
153	-37.75	-38.25	
154	-38	-38.5	
155	-38.25	-38.75	
156	-38.5	-39	
157	-38.75	-39.25	
158	-39	-39.5	
159	-39.25	-39.75	
160	-39.5	-40	
161	-39.75	-40.25	
162	-40	-40.5	
163	-40.25	-40.75	
164	-40.5	-41	
165	-40.75	-41.25	
166	-41	-41.5	
167	-41.25	-41.75	
168	-41.5	-42	
169	-41.75	-42.25	
170	-42	-42.5	
171	-42.25	-42.75	
172	-42.5	-43	
173	-42.75	-43.25	
174	-43	-43.5	
175	-43.25	-43.75	
176	-43.5	-44	
177	-43.75	-44.25	
178	-44	-44.5	
179	-44.25	-44.75	
180	-44.5	-45	
181	-44.75	-45.25	
182	-45	-45.5	
183	-45.25	-45.75	
184	-45.5	-46	
185	-45.75	-46.25	
186	-46	-46.5	
187	-46.25	-46.75	
188	-46.5	-47	
189	-46.75	-47.25	
190	-47	-47.5	
191	-47.25	-47.75	
192	-47.5	-48	
193	-47.75	-48.25	
194	-48	-48.5	
195	-48.25	-48.75	
196	-48.5	-49	
197	-48.75	-49.25	
198	-49	-49.5	
199	-49.25	-49.75	
200	-49.5	-50	
201	-49.75	-50.25	
202	-50	-50.5	
203	-50.25	-50.75	
204	-50.5	-51	
205	-50.75	-51.25	
206	-51	-51.5	
207	-51.25	-51.75	
208	-51.5	-52	
209	-51.75	-52.25	
210	-52	-52.5	
211	-52.25	-52.75	
212	-52.5	-53	
213	-52.75	-53.25	
214	-53	-53.5	
215	-53.25	-53.75	
216	-53.5	-54	
217	-53.75	-54.25	
218	-54	-54.5	
219	-54.25	-54.75	
220	-54.5	-55	
221	-54.75	-55.25	
222	-55	-55.5	
223	-55.25	-55.75	
224	-55.5	-56	
225	-55.75	-56.25	
226	-56	-56.5	
227	-56.25	-56.75	
228	-56.5	-57	
229	-56.75	-57.25	
230	-57	-57.5	
231	-57.25	-57.75	
232	-57.5	-58	
233	-57.75	-58.25	
234	-58	-58.5	
235	-58.25	-58.75	
236	-58.5	-59	
237	-58.75	-59.25	
238	-59	-59.5	
239	-59.25	-59.75	
240	-59.5	-60	
241	-59.75	-60.25	
242	-60	-60.5	
243	-60.25	-60.75	
244	-60.5	-61	
245	-60.75	-61.25	
246	-61	-61.5	
247	-61.25	-61.75	
248	-61.5	-62	
249	-61.75	-62.25	
250	-62	-62.5	
251	-62.25	-62.75	
252	-62.5	-63	
253	-62.75	-63.25	
254	-63	-63.5	
255	-63.25	-63.75	
256	-63.5	-64	
257	-63.75	-64.25	
258	-64	-64.5	
259	-64.25	-64.75	
260	-64.5	-65	
261	-64.75	-65.25	
262	-65	-65.5	
263	-65.25	-65.75	
264	-65.5	-66	
265	-65.75	-66.25	
266	-66	-66.5	
267	-66.25	-66.75	
268	-66.5	-67	
269	-66.75	-67.25	
270	-67	-67.5	
271	-67.25	-67.75	
272	-67.5	-68	
273	-67.75	-68.25	
274	-68	-68.5	
275	-68.25	-68.75	
276	-68.5	-69	
277	-68.75	-69.25	
278	-69	-69.5	
279	-69.25	-69.75	
280	-69.5	-70	
281	-69.75	-70.25	

递推公式: (1)
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4} \quad (n \geq 2) \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}.$$

【例 4】 计算数列 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的和.

方法 1:

按 $\boxed{2nd}[LIST]$, 打开 OPS 5: seq(, 建立数列; 再按 $\boxed{2nd}[LIST]$, 打开 MATH 5:

sum(, 得到数列的和.

seq(n,n,1,7)
{1 2 3 4 5 6 7}
sum(Ans)
28

seq(n,n,1,7)→L1
{1 2 3 4 5 6 7}
cumSum(seq(n,n,1,7))→L2
{1 3 6 10 15 21...}

L1	L2	L3	3
1	1		
2	3		
3	6		
4	10		
5	15		
6	21		
7	28		
L3(0)=			

方法 2:

按 $\boxed{2nd}[LIST]$, 打开 OPS 5: seq(赋予 L₁, 则数组 L₁ 就是项数; 再按 $\boxed{2nd}[LIST]$,

打开 OPS 6: cumSum(, 赋予 L₂, 则数组 L₂ 就是该数列的前 n 项和组成的数列 {S_n} ; 按 \boxed{STAT} , 打开 1: Edit, 得到前 7 项和为 28.

方法 3:

在数组 L3 中, 建立前 n 项和的数列 {S_n} , 其第 7 项就是前 7 项的和.

L1	L2	L3	3
1	1		
2	3		
3	6		
4	10		
5	15		
6	21		
7	28		
L3(0)=			

L1	L2	L3	3
1	1	1	
2	3	3	
3	6	6	
4	10	10	
5	15	15	
6	21	21	
7	28	28	
L3=cumSum(L2)			

二、图形计算器之数列教学探究

在数列学习过程中, 我们可以利用图形计算器直观运算、图表功能、数列通项公式、递推公式和求和公式的直接使用以及函数拟合功能等, 加深对数列基本知识的理解和掌握, 拓展数列问题解决的途径, 积极形成观察、分析、抽象、归纳的探究问题的思维方法, 使之用于解决数列的实际问题.

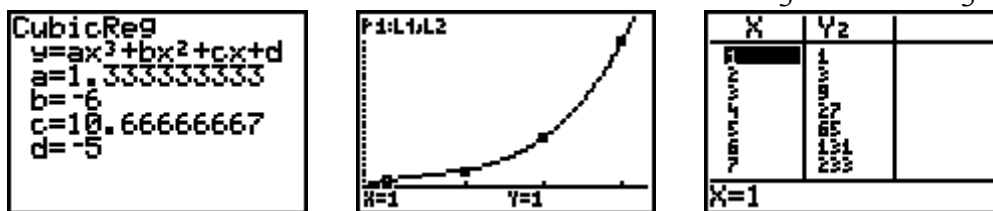
【例 5】 已知一个数列的前 4 项为 1, 3, 9, 27, 写出它的一个通项公式.

解：利用递推公式得数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式是 $a_n = 3^{n-1}$.

利用函数拟合功能，当选择指数函数型时，得该数列的一个通项公式为 $a_n = 3^{n-1}$;



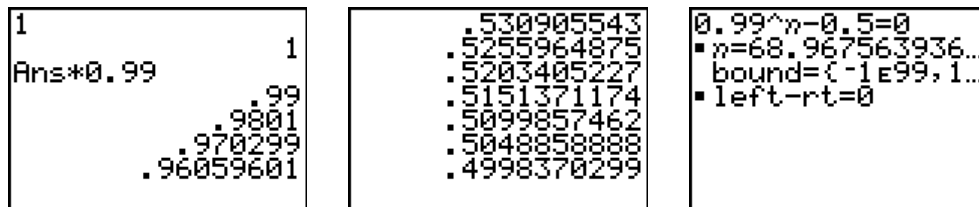
当选择三次函数型时，得该数列的一个通项公式为 $a_n = \frac{4}{3}n^3 - 6n^2 + \frac{32}{3}n - 5$.



由此可知，对于给出数列的某些项，其通项公式是不唯一的。

【例 6】某种物质因其具有放射性，而不断地变化为其他物质，每经过一年其残留的这种物质为原来的 99%，那么这种物质的半衰期（放射性物质衰变为原来的一半的时间）为多长时间？（精确到 1 年）

解：



【例 7】已知等比数列 6, 3, 1.5, ……，求使得该等比数列前 n 项和 S_n 大于 11.5 的最小的 n 的值.

解：由题意， $q = \frac{1}{2}$ ，有 $S_n = \frac{6(1-0.5^n)}{1-0.5} > 11.5$,

得最小的 n 的值为 5.

n	$u(n)$
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	1

$u(n)=1$

L1	L2	L3	2
1	6	-----	
2	3		
3	1.5		
4	.75		
5	.375		
6	.1875		
7	.09375		

$L2 = 6 * 0.5^{(L1-1)}$

L1	L2	L3	3
1	6	6	
2	3	9	
3	1.5	10.5	
4	.75	11.25	
5	.375	11.625	
6	.1875	11.813	
7	.09375	11.906	

$L3 = \text{cumSum}(L2)$

解 2:

【练习】

1. (1) 如果 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1 = -5$, $a_2 = -1$ ，求 a_6 和 a_8 的值；

(2) 如果 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_4 = 1$, $a_5 = -5$ ，求 a_8 和 a_9 的值.

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ ， $a_1 = 31$, $d = -2$ ，求：数列 $\{|a_n|\}$ 的前 30 项和.

3. 从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业. 根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少 20%. 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 25%.

请问：至少经过多少年投资可以见效？（旅游业的总收入超过总投入）

【问题推广】

探索 1：15 年以后，投资将获得怎样的回报？

探索 2：该地区今后每年的旅游业收入和投入之比将会发生怎样的变化？

4. 一个小型林场原先种植有 4000 棵树. 从今年起，林场计划每年砍伐 15% 以获取经济效益，同时又补种上 1000 棵树. 若干年后，这片林场会由此而消失吗？若会消失，将在几年后？若不会消失，那么林场的规模会稳定下来吗？如果会稳定下来，又至少需要多少时间？稳定在什么规模上？

5. 设备改造方案的选择：

如果现在部门上报两个技术改造方案：

方案 I 投资 100 万元购置新设备，每年末可增收 20 万元

方案 II 投资 80 万元更新部分装置，可节约每年初的 16 万元检修费

这些设备使用期均为 8 年，银行复利年利率 4%，如何决定采用哪个方案？