

数列的教学研究

华东师大一附中 区志华

随着社会的进步和信息技术的迅猛发展，当前的上海数学教育改革，正努力通过利用现代信息技术，构建基于计算机、计算器（包括科学计算器、函数型计算器和图形计算器）和信息网络的数字化数学活动平台（DIMA），使之成为学生学习的有效手段和工具，成为获取学习资源和开展学习交流的广阔平台。

图形计算器的各项功能与数学教学内容关系密切，不仅便于学生自主进行的直观体验、形象解答、猜想归纳和探索实践，而且可以实现数学问题的情景化、解决途径的多样化和学习过程的活动化。

数列不仅是数学的基础知识之一，蕴含着类比、猜想、归纳、递归等丰富的数学思想方法，而且数列知识在日常生活、社会实践中有着广泛的应用。因此，将图形计算器技术运用于数列的学习过程，借助图形计算器的数列编辑、数列图像、数列运算表等功能，以及递推公式直接运用和函数拟合回归的技术特点，可以使学生在有效的尝试猜想、合理归纳、简化运算、验证运算中，学习数列的基本知识，增添解决问题、探究问题的途径，从而体验其中的数学思想和方法，增强数列知识的综合运用能力。

一、图形计算器之数列常用技术

利用图形计算器的数列模式中，关于数列的编辑、图像、数组和函数拟合等技术手段，我们可以采用直观、形象的方法，通过列举、归纳、猜想、验证及演绎证明，实现对数列有关概念、公式的认识与理解。

【例 1】 数列 2, 4, 6, 8, 10, 12 的通项公式为 $a_n = 2n$ ($1 \leq n \leq 6$)

则其图像是：

按 **MODE** ，选中第四行的第 4 项

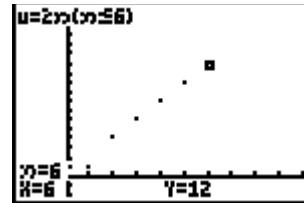
Seq (Sequence)，进入数列状态。



按 $\boxed{Y=}$ ，进入数列编辑器，输入数列的通项公式，其中 $u(nMin)$ 表示数列的首项。

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n) 2n(n≤6)
v(nMin) 2
v(n) 14-2n(n≤6)
v(nMin) 12
w(n)=
```

按 \boxed{TRACE} ，显示数的图像并跟踪数据。



【例 2】根据数列 $\{a_n\}$ 的递推公式，写出该数列的前 7 项：

$$(1) \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2); \end{cases} \quad (2) \begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3). \end{cases}$$

按 $\boxed{Y=}$ 键，输入两个数列的递推公式。其中， $u(nMin)=1$ 表示第一个数列的首项， $v(nMin) = \{1, 1\}$ 表示第二个数列的前两项，前者表示 a_2 ，后者表示 a_1 。

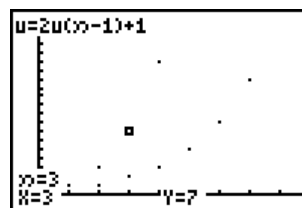
```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n) 2u(n-1)+1
v(nMin) 1
v(n) v(n-1)+v(n-2)
v(nMin) 1,1
w(n)=
```

按 $\boxed{2nd}[TABLE]$ 键，用列表方式，显示数列的各项。或者按 \boxed{TRACE} 键，显示数列的图像。

注：图像显示时，只能显示 \boxed{WINDOW} 中 $nMax$ 的数量的项。

| n | u(n) | v(n) |
|---|------|------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 7 | 2 |
| 4 | 15 | 3 |
| 5 | 31 | 5 |
| 6 | 63 | 8 |
| 7 | 127 | 13 |

n=1



```
WINDOW
nMin=1
nMax=10
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=-.7
Xmax=8.7
Xscl=1
```

数组 LIST 的菜单内容

按 $\boxed{2nd}[LIST]$ 得到右图。

数组名 NAMES

选项 OPS

1: 升值排列法

```
NAMES OPS MATH
1: L1
2: L2
3: L3
4: L4
5: L5
6: L6
7: 4A
```

- 2: 降序排列法
- 3: 维数
- 4: 用数填充
- 5: 数列生成数组
- 6: 前 n 项部分和
- 7: 相邻项之差
- 8: 选择数据
- 9: 扩充数组
- 0: 数组化矩阵
- A: 矩阵化数组
- B: 数组标志

```

NAMES OPS MATH
1: SortA(
2: SortD(
3: dim(
4: Fill(
5: seq(
6: cumSum(
7: ΔList(

NAMES OPS MATH
6: ↑cumSum(
7: ΔList(
8: Select(
9: augment(
0: List→matr(
A: Matr→list(
B: L

```

数学计算 MATH

- 1: 最小值
- 2: 最大值
- 3: 平均值
- 4: 中位数
- 5: 和
- 6: 积
- 7: 标准差
- 8: 方差

```

NAMES OPS MATH
1: min(
2: max(
3: mean(
4: median(
5: sum(
6: Prod(
7: ↓stdDev(

```

```

NAMES OPS MATH
2: ↑max(
3: mean(
4: median(
5: sum(
6: Prod(
7: stdDev(
8: variance(

```

【例 3】 已知以下数列，运用图形计算器，观察其相邻两项之间的关系：

(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \dots$;

(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$.

写出它们的一个递推公式.

解：

| L1 | L2 | L3 | 3 |
|----------------|-------|-------|---|
| 1 | 0.25 | -0.25 | |
| 1/4 | 0 | -0.25 | |
| 0 | -0.25 | -0.25 | |
| -1/4 | -0.5 | -0.25 | |
| -1/2 | -0.75 | -0.25 | |
| ----- | ----- | ----- | |
| L3 = ΔList(L2) | | | |

| L1 | L2 | L3 | 3 |
|------------|----------|-----------|---|
| 1 | -0.5 | -0.25 | |
| -0.5 | 0.25 | -0.125 | |
| 0.25 | -0.125 | -0.0625 | |
| -0.125 | 0.0625 | -0.03125 | |
| 0.0625 | -0.03125 | -0.015625 | |
| ----- | ----- | ----- | |
| L3 = L2/L1 | | | |

递推公式: (1)
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4} \quad (n \geq 2) \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}.$$

【例 4】 计算数列 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的和.

方法 1:

按 $\boxed{2nd}$ [LIST], 打开 OPS 5: seq(, 建立数列; 再按 $\boxed{2nd}$ [LIST], 打开 MATH 5:

sum(, 得到数列的和.

| |
|-----------------|
| seq(n,n,1,7) |
| {1 2 3 4 5 6 7} |
| sum(Ans) |
| 28 |

| |
|-------------------------|
| seq(n,n,1,7)→L1 |
| {1 2 3 4 5 6 7} |
| cumSum(seq(n,n,1,7))→L2 |
| {1 3 6 10 15 21...} |

| L1 | L2 | L3 | 3 |
|--------|----|----|---|
| 1 | 1 | | |
| 2 | 3 | | |
| 3 | 6 | | |
| 4 | 10 | | |
| 5 | 15 | | |
| 6 | 21 | | |
| 7 | 28 | | |
| L3(0)= | | | |

方法 2:

按 $\boxed{2nd}$ [LIST], 打开 OPS 5: seq(赋予 L₁, 则数组 L₁ 就是项数; 再按 $\boxed{2nd}$ [LIST],

打开 OPS 6: cumSum(, 赋予 L₂, 则数组 L₂ 就是该数列的前 n 项和组成的数列 {S_n} ; 按 \boxed{STAT} , 打开 1: Edit, 得到前 7 项和为 28.

方法 3:

在数组 L3 中, 建立前 n 项和的数列 {S_n} , 其第 7 项就是前 7 项的和.

| L1 | L2 | L3 | 3 |
|--------|----|----|---|
| 1 | 1 | | |
| 2 | 3 | | |
| 3 | 6 | | |
| 4 | 10 | | |
| 5 | 15 | | |
| 6 | 21 | | |
| 7 | 28 | | |
| L3(0)= | | | |

| L1 | L2 | L3 | 3 |
|---------------|----|----|---|
| 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 3 | 3 | |
| 3 | 6 | 6 | |
| 4 | 10 | 10 | |
| 5 | 15 | 15 | |
| 6 | 21 | 21 | |
| 7 | 28 | 28 | |
| L3=cumSum(L2) | | | |

二、图形计算器之数列教学探究

在数列学习过程中, 我们可以利用图形计算器直观运算、图表功能、数列通项公式、递推公式和求和公式的直接使用以及函数拟合功能等, 加深对数列基本知识的理解和掌握, 拓展数列问题解决的途径, 积极形成观察、分析、抽象、归纳的探究问题的思维方法, 使之用于解决数列的实际问题.

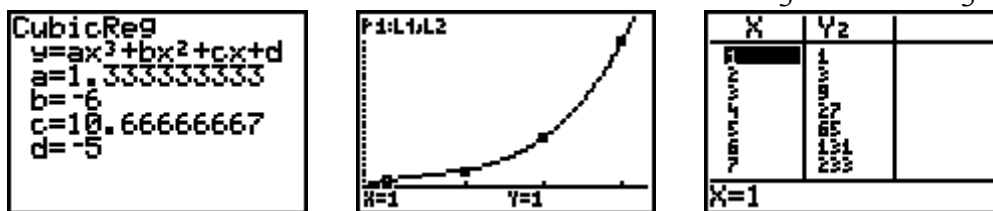
【例 5】 已知一个数列的前 4 项为 1, 3, 9, 27, 写出它的一个通项公式.

解：利用递推公式得数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式是 $a_n = 3^{n-1}$ 。

利用函数拟合功能，当选择指数函数型时，得该数列的一个通项公式为 $a_n = 3^{n-1}$ ；



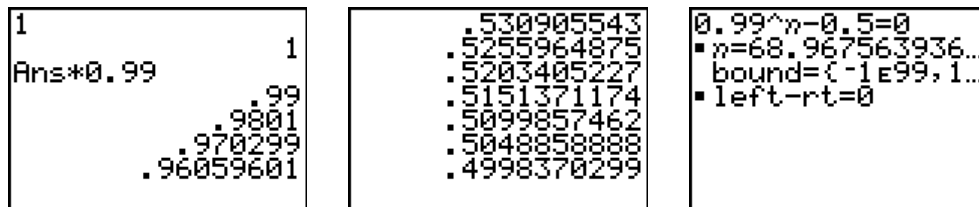
当选择三次函数型时，得该数列的一个通项公式为 $a_n = \frac{4}{3}n^3 - 6n^2 + \frac{32}{3}n - 5$ 。



由此可知，对于给出数列的某些项，其通项公式是不唯一的。

【例 6】某种物质因其具有放射性，而不断地变化为其他物质，每经过一年其残留的这种物质为原来的 99%，那么这种物质的半衰期（放射性物质衰变为原来的一半的时间）为多长时间？（精确到 1 年）

解：



【例 7】已知等比数列 6, 3, 1.5, ……，求使得该等比数列前 n 项和 S_n 大于 11.5 的最小的 n 的值。

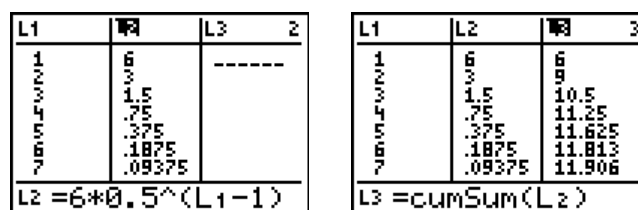
解：由题意， $q = \frac{1}{2}$ ，有 $S_n = \frac{6(1-0.5^n)}{1-0.5} > 11.5$ ，

得最小的 n 的值为 5。

| n | $u(n)$ |
|-----|--------|
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 0 |
| 4 | 0 |
| 5 | 1 |
| 6 | 1 |

$u(n)=1$

解 2：



【练习】

1. (1) 如果 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1 = -5$, $a_2 = -1$ ，求 a_6 和 a_8 的值；

(2) 如果 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_4 = 1$, $a_5 = -5$ ，求 a_8 和 a_9 的值.

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ ， $a_1 = 31$, $d = -2$ ，求：数列 $\{|a_n|\}$ 的前 30 项和.

3. 从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业. 根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少 20%. 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 25%.

请问：至少经过多少年投资可以见效？（旅游业的总收入超过总投入）

【问题推广】

探索 1：15 年以后，投资将获得怎样的回报？

探索 2：该地区今后每年的旅游业收入和投入之比将会发生怎样的变化？

4. 一个小型林场原先种植有 4000 棵树. 从今年起，林场计划每年砍伐 15% 以获取经济效益，同时又补种上 1000 棵树. 若干年后，这片林场会由此而消失吗？若会消失，将在几年后？若不会消失，那么林场的规模会稳定下来吗？如果会稳定下来，又至少需要多少时间？稳定在什么规模上？

5. 设备改造方案的选择：

如果现在部门上报两个技术改造方案：

方案 I 投资 100 万元购置新设备，每年末可增收 20 万元

方案 II 投资 80 万元更新部分装置，可节约每年初的 16 万元检修费

这些设备使用期均为 8 年，银行复利年利率 4%，如何决定采用哪个方案？