

## 函数作图 (2)

上外附属大境中学 高 虹

利用图形计算器的函数作图功能,可以有效学习不等式、函数、方程等数学知识,通过图形,深刻理解这三者之间的关系。如果能够综合运用图形计算器的其他功能(比如:逻辑功能、列表运算、代数运算以及函数拟合功能),可以更好地学好数学。

**例 1** 用函数图像解下列不等式:

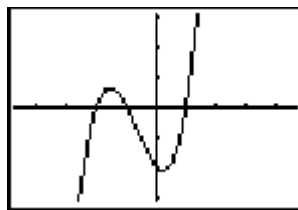
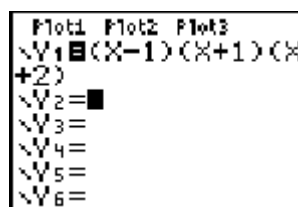
(1)  $(x-1)(x+1)(x+2) > 0$

(2)  $(x-1)^3(x+1)(x+2)^2 > 0$

**参考步骤:**

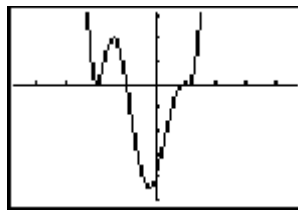
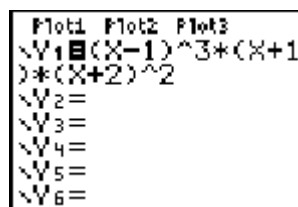
(1) 先请学生用标根法求解上述不等式;

(2) 然后在图形计算器 $\boxed{\text{Y=}}$ 编辑器中输入右图所示的表达式;



(3) 按 $\boxed{\text{GRAPH}}$ 绘制函数图像;

(4) 重复 (1)、(2) 两步求得另一个不等式的解集;



X: -4.7, 4.7; Y: -5, 3, 1.

(5) 引导学生观察函数图像与标根法求解原则之间的关系。

**本题答案:**

(1)  $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$ ;

(2)  $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty)$ 。

**备注:**

关键是想通过技术的运用促进学生对本数学知识的理解, 寻求不等式、函数之间的关系, 从而理解标根法的实质。

有时候图形并不理想, 可能需要适当的调整窗口的大小。一元二次不等式也可以用同样的方法来求解。

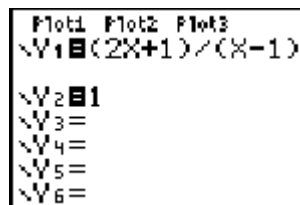
**例 2** (1) 研究分式函数  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  的对称中心, 渐近线, 图像所在的大致区域, 从而

得到关于函数  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $c \neq 0$ ) 的一般性的结论;

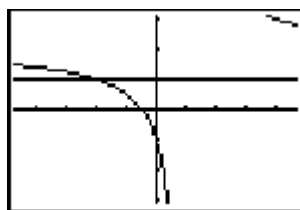
(2) 利用函数图像解分式不等式:  $\frac{2x+1}{x-1} < 1$ 。

**参考步骤:**

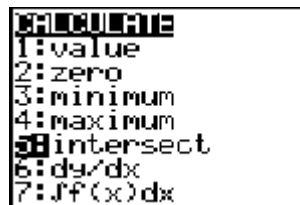
(1) 构造两个函数  $y_1 = \frac{2x+1}{x-1}$ ,  $y_2 = 1$ , 按  $\boxed{\text{Y=}}$ , 输入右图所示的表达式;



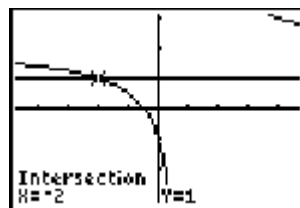
(2) 按  $\boxed{\text{GRAPH}}$  绘制函数图像, 观察可知  $y_1 < y_2$  时  $x$  的取值为交点的横坐标;



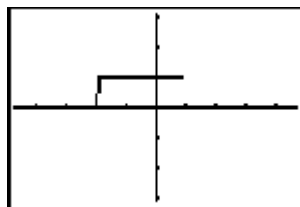
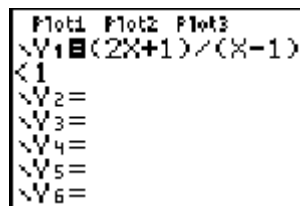
(3) 按  $\boxed{2\text{nd}} \boxed{[\text{CALC}]} \boxed{5}$ , 求两个函数的交点坐标;



(4) 按  $\boxed{\text{ENTER}} \boxed{\text{ENTER}} \boxed{\text{ENTER}}$  (若光标不在渐近线  $x=1$  左边, 就会跳出出错信息, 这时要把光标移到  $x=1$  的左边), 得到交点坐标, 从而得到该分式不等式的解集;



(5) 用逻辑运算可以更方便得到最后的结果: 在  $\boxed{\text{Y=}}$  输入右图所示的表达式, 按  $\boxed{\text{GRAPH}}$  得到对应解集。



**本题答案:**

(1) 对称中心:  $(1, 2)$ ;

渐近线:  $x=1, y=2$ ;

图像所在的大致区域: 左下及右上;

对称中心:  $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ ;

渐近线:  $x=-\frac{d}{c}, y=\frac{a}{c}$ ;

图像所在的大致区域:  $a、c$  同号, 左下及右上;  $a、c$  异号, 左上及右下;  $a=0$ , \_\_\_\_\_。

(2)  $(-2, 1)$

**备注:**

分式函数  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  的对称中心、渐近线、大致图形, 学生经常要出错, 通过图形

计算器, 借助于函数图像, 可以更形象地帮助学生理解知识。

**操作说明:**

按  $\boxed{\text{ZOOM}}\boxed{4}$ , 按  $\boxed{\text{WINDOW}}$ , 调整窗口, 将对应的  $X_{\min}$ 、 $X_{\max}$ 、 $Y_{\min}$ 、 $Y_{\max}$  都乘以 1.5 倍,

比较得到的图像与实际图形间的关系。

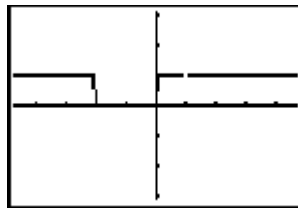
**例 3** 利用函数图像解含分式的绝对值不等式:  $\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| \geq 1$ 。

**参考步骤:**

(1) 按  $\boxed{\text{Y=}}$ , 输入右图所示的表达式;

(2) 按  $\boxed{\text{GRAPH}}$ , 如图, 发现当  $x \geq 0$  或  $x \leq -2$  时逻辑值为 1,

但另外  $x=1$  时图上有一个断点, 想一想, 这是什么意思?



(3) 还可以按 $\boxed{2nd}$  [TABLE] 得到数据表格，可以看到  $x=1$  时函数数值显示为 ERROR，为什么？

X	Y1	
-3	1	
-2	1	
-1	0	
0	1	
1	ERROR	
2	1	
3	1	

X = -3

**本题答案：**

$$(-\infty, -2] \cup [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

**备注：**

分母不为零的现象，反映在计算器中就是在图像上该点没有定义（按 $\boxed{TRACE}$ ，在“X=”后面输入 1，发现“Y=”后面没有值），或者表格中对应值为 ERROR。通过这两个操作，让学生明确在解含分式的不等式时要注意分母不为零。

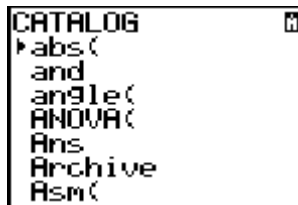
**操作说明：**

调用绝对值符号的操作：

(1) 按 $\boxed{MATH}$   $\blacktriangleright$ ，选 1；



(2) 当你记不住要调用的命令在哪个菜单中时，也可以这样操作：按 $\boxed{2nd}$   $\boxed{0}$ ，调用 [CATALOG]，计算器中的所有命令都在这里。

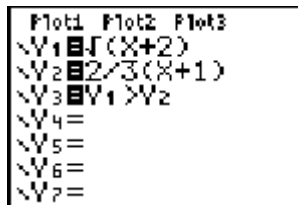


想一想，如何最快找到你要找的命令：比如说 Sum？

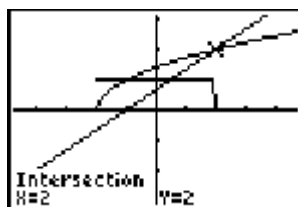
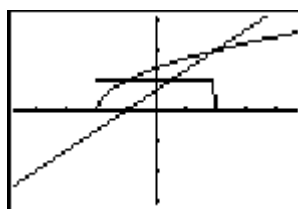
**例 4** 利用函数图像解无理不等式： $\sqrt{x+2} > \frac{2}{3}(x+1)$ 。

**操作步骤：**

(1) 构造两个函数  $y_1 = \sqrt{x+2}$ ， $y_2 = \frac{2}{3}(x+1)$ ，按 $\boxed{Y=}$ ，输入右图所示的表达式；



(2) 按 $\boxed{GRAPH}$  绘制函数图像，重点理解  $Y_3$  解集与  $Y_1$  和  $Y_2$  图像交点之间的联系；





$f(-3) = 26 \neq 30$ ，所以  $(-3, 30)$  不在所求二次函数上；

(6) 我们也可以用函数运算表来替代第五操作：

按  $\boxed{2nd}[\text{TBLSET}]$ ，进入设置窗口，在自变量“Indpnt:”处设置为 Ask，表示自变量的值按操作者要求输入；同时，函数值“Depend:”处设置为 Auto，表明函数值自动显示；按  $\boxed{2nd}[\text{TABLE}]$  进入运算表，光标移到“X=”下方后，输入自变量的值 5，按  $\boxed{ENTER}$  确认，得到相应函数值，输入 -3 按  $\boxed{ENTER}$  确认，得到相应函数值。

X	Y1	
5	34	
-3	26	
X=		

**本题答案：**

$y = 2x^2 - 3x - 1$ ， $f(5) = 34$ ， $(-3, 30)$  不在所求二次函数上。

**备注：**

函数拟合是图形计算器的又一大特点，我们可以利用图形计算器进行数据采集、处理、分析功能，建立数学模型，解决实际问题。

**操作说明：**

如何进入数组编辑状态？

300	CALC TESTS
1	Edit...
2	SortA(
3	SortD(
4	ClrList
5	SetUpEditor

图形计算器提供哪些类型的函数拟合？

EDIT	TESTS
1	1-Var Stats
2	2-Var Stats
3	Med-Med
4	LinReg(ax+b)
5	QuadReg
6	CubicReg
7	QuartReg

EDIT	TESTS
7	QuartReg
8	LinReg(a+bx)
9	LnReg
0	ExpReg
A	PwrReg
B	Logistic
C	SinReg

**例 6** (1) 每封信函的邮资  $P$  关于信函质量  $m$  (不超过 60 克) 的函数关系式为

$$P = \begin{cases} 0.8, & 0 < m \leq 20 \\ 1.6, & 20 < m \leq 40 \\ 2.4, & 40 < m \leq 60 \end{cases}$$

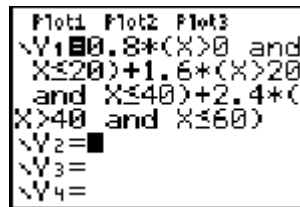
像这样的函数即为分段函数，请用图形计算器作出相应的图像；

(2)  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数，在图形计算器中研究高斯函数  $y=[x]$  的图像特征（注意每一段的端点情况），并思考能否用高斯函数来表示（1）中的函数关系式；

(3) 除了 int 函数（高斯函数），在图形计算器中还有两个相类似的函数：ipart 函数和 fpart 函数，请课后自行研究其图像特征（注意每一段的端点情况）。

**参考步骤：**

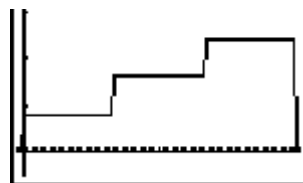
(1) 按  $\boxed{Y=}$ ，利用逻辑运算符和关系运算符，输入右图所示的表达式；



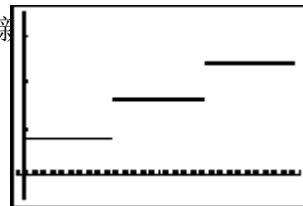
(2) 按  $\boxed{WINDOW}$ ，根据函数定义域和值域，如右数据设置窗口大小。

X: -1, 61; Y: -.5, 3.5.

(3) 按  $\boxed{GRAPH}$ ，绘制函数图像；

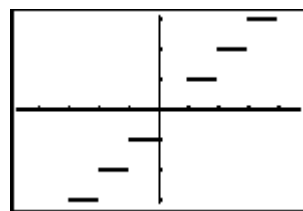


(4) 图像不理想，按  $\boxed{MODE}$ ，选中第五行 Dot，再按  $\boxed{GRAPH}$ ，得到新

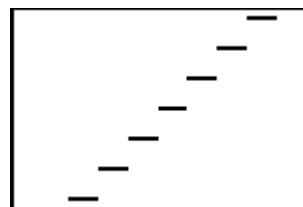


(5) 研究高斯函数：

按  $\boxed{Y=}$ ，输入表达式  $Y_1 = \text{int}(x)$ ；

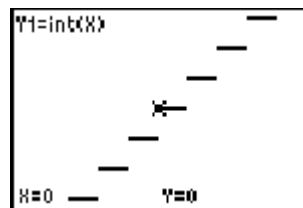


(6) 按  $\boxed{ZOOM}\boxed{4}$ ，回到标准窗口，绘制图像如右；

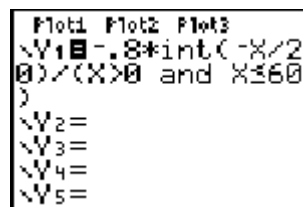


(7) 按  $\boxed{2nd}\boxed{FORMAT}$ ，选中 AxesOff，关闭坐标轴显示；

(8) 按  $\boxed{GRAPH}$ ，得到函数图像；



(9) 按  $\boxed{TRACE}$ ，检验函数图像在每一段上的端点情况（左闭右开）；



(10) 按 $\boxed{Y=}$ , 如图输入表达式;

(11) 设置窗口, 数据同第二步;

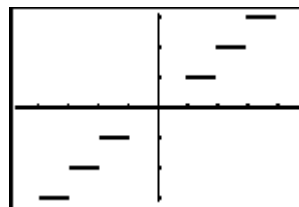
(12) 按 $\boxed{2nd}[\boxed{FORMAT}]$ , 选中 AxesOn, 打开坐标轴显示;

按 $\boxed{GRAPH}$ , 得到的函数图像与第四步得到的函数图像一样;

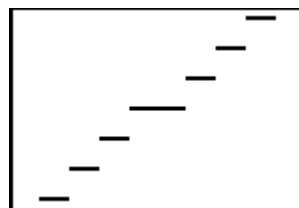
(13) 研究  $fpart$  函数和  $ipart$  函数:

按 $\boxed{Y=}$ , 输入表达式  $y_2 = ipart(x)$ ;

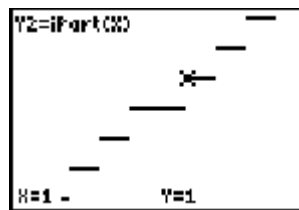
按 $\boxed{ZOOM}[\boxed{4}]$ , 回到标准窗口, 得到函数图像;



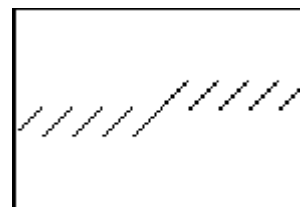
按 $\boxed{2nd}[\boxed{FORMAT}]$ , 选中 AxesOff, 关闭坐标轴显示;



按 $\boxed{TRACE}$ , 检验函数图像在每一段上的端点情况;

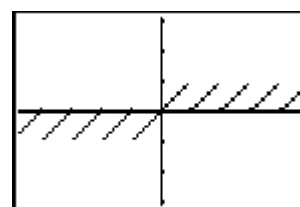
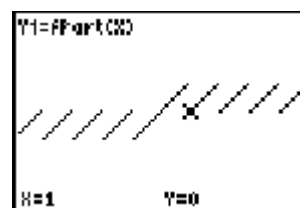


(14) 从函数图像上引导学生比较高斯函数与  $fpart$  函数的异同点;



(15) 按 $\boxed{Y=}$ , 输入表达式  $y_3 = fpart(x)$ ;

按 $\boxed{GRAPH}$ , 得到函数图像;



按  $\boxed{\text{TRACE}}$ ，检验函数图像在每一段上的端点情况；

按  $\boxed{2\text{nd}}\boxed{\text{FORMAT}}$ ，选中 AxesOn，打开坐标轴显示。

### 备注：

分段函数是高中数学函数学习中的一个难点；高斯函数是数学课本上的内容，在实际问题有着较广泛的应用，特别是在数学竞赛中经常出现。利用图形计算器函数作图功能，可以更好的研究该函数的性质。

### 操作说明：

按 \_\_\_\_\_ 键，再按  $\boxed{\text{▶}}$ ，可以找到  $\text{int}()$ 、 $\text{fpart}()$ 、 $\text{ipart}()$ ？

### 思考：

$$x = \text{fpart}(x) + \text{ipart}(x) ? \quad \text{ipart}(x) = \text{int}(x) ?$$

**例 7** (1) 研究  $a$ 、 $b$  ( $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ) 对关于  $x$  的函数  $f(x) = a|x+2| + b|x-3|$  的图像产生的影响，并研究该函数的性质（从最值、单调性等入手）；

(2) 课后请学员自行研究：

①  $A$ 、 $\omega$ 、 $\varphi$ 、 $b$  对三角函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$  图像产生的影响及该函数的性质；

②  $a$ 、 $b$  ( $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ) 对关于  $x$  的函数  $f(x) = ax + \frac{b}{x}$  图像产生的影响及该函数的性质。

### 参考步骤：

(1) 按  $\boxed{\text{Y=}}$ ，如图输入表达式；

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1= A*abs(X+2)+B
+abs(X-3)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=

```

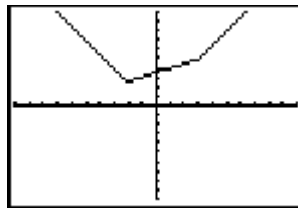
(2) 按  $\boxed{2\text{nd}}\boxed{\text{MODE}}$ ，退出解析式编辑状态，如图对字母 A、B 进行赋值；

```

1+A: .5+B
.5

```

(3) 按[ZOOM][6], 得到函数图像;



(4) 重复 (2) (3) 步骤:

按[2nd][MODE], 对字母 A、B 重新进行赋值;

按[GRAPH], 得到函数图像 (有时可能需要适当调整窗口);

(5) 观察比较每次得到的图像的异同点。

#### 备注:

关于参数对图像产生的影响, 在高中数学中经常出现。借助图形计算器来研究此类问题, 关键是参数取值的选取, 如何选择有代表意义的参数, 是值得我们思考的问题。

#### 操作说明:

如何对字母变量进行赋值? 如何得知当前字母变量的值? (未赋值前的字母变量默认为 0。)

**例 8** 读 2003 年上海秋季高考题文科第 15 题:

在 P (1, 1)、Q (1, 2)、M (2, 3) 和 N ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ) 四点中, 函数  $y = a^x$  的图象与其反函数的图象的公共点只可能是点 ( )

A. P      B. Q      C. M      D. N

思考同底数的指数函数与对数函数的公共点个数的情况。

#### 参考步骤:

(1) 按[=], 如图输入表达式;

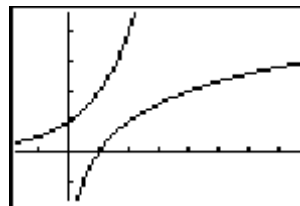
```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=A^X
Y2=log(X)/log(A)
)
Y3=■
Y4=
Y5=
Y6=
  
```

(2) 先研究底数  $a > 1$  的情况:

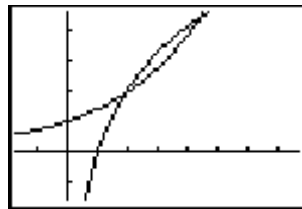
按[2nd][MODE], 对字母 A 进行赋值; (A=2)

(3) 按[GRAPH], 绘制函数图像, 适当设置窗口, 观察公共点的个数;



(4) 按 $\boxed{2nd}\boxed{MODE}$ , 重新对字母 A 进行赋值; ( $A=\sqrt{2}$ )

(5) 按 $\boxed{GRAPH}$ , 绘制函数图像, 适当设置窗口, 观察公共点的个数;

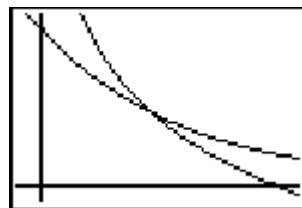


(6) 从图中可以看到两函数存在相切的可能, 寻找相切时底数的取值;

(7) 再研究底数  $0 < a < 1$  的情况:

按 $\boxed{2nd}\boxed{MODE}$ , 对字母 A 进行赋值; ( $A=0.2$ )

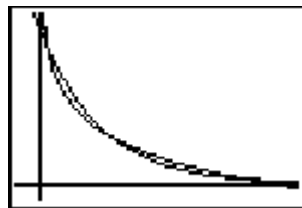
(8) 按 $\boxed{GRAPH}$ , 绘制函数图像, 适当设置窗口, 观察公共点的个数;



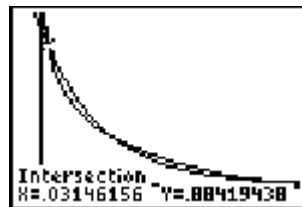
(9) 根据上述操作, 仍然无法得到本题前面给出问题的答案, 难道底数  $a$  在  $0 < a < 1$  范围内存在 3 个交点?

(10) 继续对字母 A 进行赋值; ( $A=0.02$ )

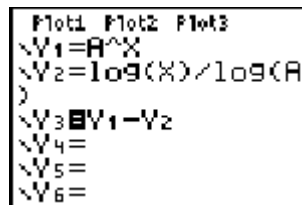
(11) 按 $\boxed{GRAPH}$ , 绘制函数图像, 适当设置窗口, 观察公共点的个数;



(12) 按 $\boxed{2nd}\boxed{CALC}$ , 求出此时交点的坐标 (可以适当调整窗口大小, 以便更清楚地观察);

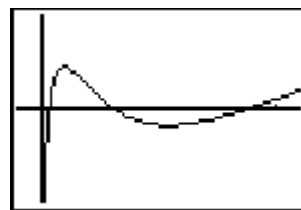


(13) 也可以利用函数零点来观察交点个数:



按  $\boxed{Y=}$ , 如图输入表达式  $Y_3$ ;

调整窗口, 按  $\boxed{\text{GRAPH}}$ , 绘制函数图像, 发现在  $(0,1)$  范围上有 3 个零点, 说明  $Y_1$ 、 $Y_2$  两函数有 3 个公共点。



X: -0.1, 1.1; Y: -0.2, 0.2.

**本题答案:**

D。

**备注:**

反函数的学习是部分高中学生的薄弱环节, 对于互为反函数的两个函数的公共点问题, 不少学生想当然地认为是在直线  $y=x$  上; 而对于同底数的指数函数与对数函数当底数  $0 < a < 1$  时要研究公共点个数问题, 特别是  $a=0.02$  这样的取值时, 教师上课时根本没有办法徒手画出图像。图形计算器在这里起了很好的作用, 形象、具体 (包括直接求出交点的坐标)。

在解决题目开始给出的问题时, 还是希望教师们先用数学的方法来求解。继而思考 D 选项对应点的不寻常性 (它没有在直线  $y=x$  上)。

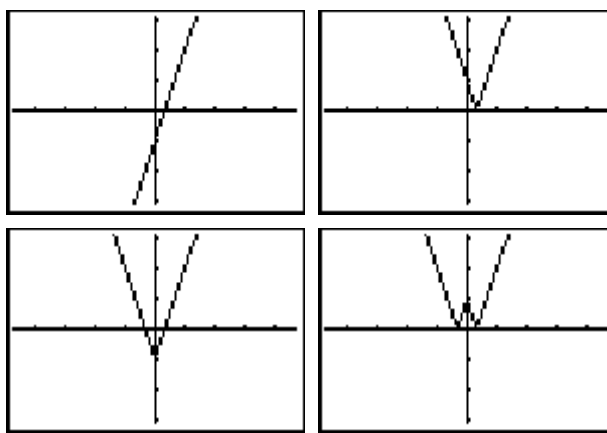
**思考:**

两个函数的差函数的零点与已知函数的公共点之间存在什么关系?

你能找到同底数的指数函数与对数函数当  $a > 1$  时两函数图像相切时的  $a$  的近似值吗? 当  $0 < a < 1$  时, 从一个交点到三个交点的临界值吗?

**例 9** (1) 已知  $f(x) = 3x - 1$ , 画出函数  $f(x)$ 、 $|f(x)|$ 、 $f(|x|)$ 、 $|f(|x|)|$  的图像, 理解函数图像相互之间的变换关系, 以及函数的对称性、单调性;

(2) 如果关于  $x$  的方程  $|3|x| - 1| = 2^x + a$  有 4 个实数根, 求



实数  $a$  的取值的集合。

**Steps**

(1) 按 $\boxed{Y=}$ , 如图输入表达式;

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=3X-1
\Y2=abs(Y1)
\Y3=3abs(X)-1
\Y4=abs(Y3)
\Y5=
\Y6=
\Y7=
    
```

(2) 按 $\boxed{GRAPH}$ , 绘制函数图像 (窗口设置参照 $\boxed{ZOOM}$  $\boxed{4}$ );

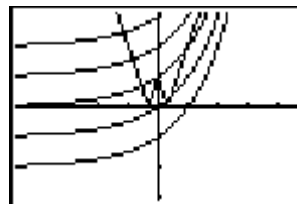
(3) 引导学生观察比较各函数之间的关系, 寻找图像变换的规律, 并通过图像研究相应函数的对称性和单调性;

(4) 按 $\boxed{Y=}$ , 如图输入表达式, 只选中  $Y_4$ 、 $Y_5$ ;

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=3X-1
\Y2=abs(Y1)
\Y3=3abs(X)-1
\Y4=abs(Y3)
\Y5=2^X+(-2,-1,0,
,1,2)
\Y6=
    
```

(5) 按 $\boxed{GRAPH}$ , 绘制函数图像 ( $Y_5$  显示的是一组曲线系);

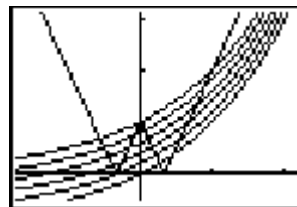


(6) 按 $\boxed{ZOOM}$  $\boxed{1}$ , 局部放大图像, 观察可能出现 4 个交点的  $a$  的值;

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=3X-1
\Y2=abs(Y1)
\Y3=3abs(X)-1
\Y4=abs(Y3)
\Y5=2^X+(-1,-.8,
-.6,-.4,-.2,0)
\Y6=
    
```

(7) 重新尝试  $a$  的值, 得到新的函数图像;



(8) 从图像中判断得到第二小题的解。

**本题答案:**

(1)

(2)

**备注:**

图像变换是高中数学的难点,不少学生对什么时候关于  $x$  轴翻折,什么时候关于  $y$  轴对称,总也搞不清楚。借助图形计算器的作图功能,可以迅速作图,学生也就有时间去研究如何翻折的问题了。(但我们还是希望学生自己先作图,将计算器作图作为检验个人作图正确性的手段,最终达到不利用计算器也能得到正确图形的目的)

本题第 (2) 问,将方程的解的个数转化为函数交点个数问题,将方程的解转化为函数交点横坐标问题,采用数形结合的方法,充分体现数学中转化的思想。但学生在回答时,容易出现错误的答案,关键是没有充分注意函数发展的趋势。