Função Quadrática

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

Os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire para fazer conjeturas à volta de um problema envolvendo família de funções quadráticas e respetiva representação gráfica. Mais concretamente o efeito provocado nas parábolas que representam as funções pela variação dos parâmetros na família de funções.

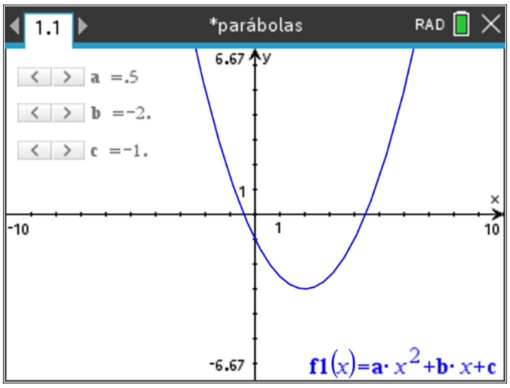
O trabalho com a tecnologia TI-Nspire favorece a conjetura e melhora as condições da prova, que é o objetivo final da tarefa.

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Ficheiro parábolas.tns
- Folha de tarefas

TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

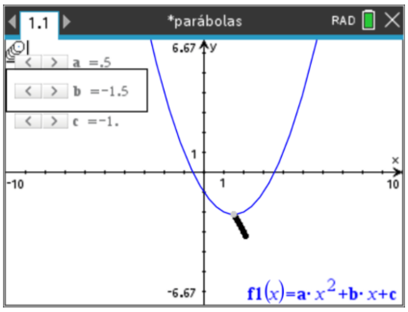
Considerando a figura, onde está representada uma função quadrática da família $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, pretende-se estudar o efeito dos parâmetros destas funções nos respetivos gráficos.

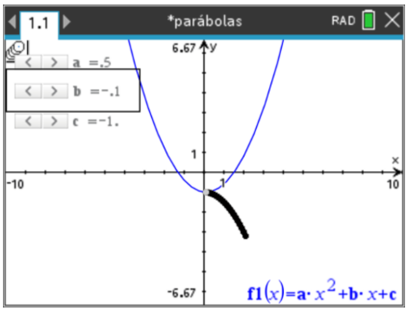


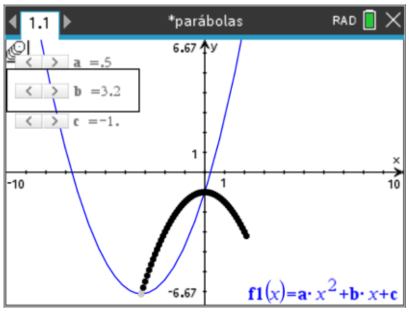
Note-se que o efeito provocado na parábola pela alteração dos parâmetros a e c são relativamente simples com recurso ao conhecimento das transformações geométricas.

Já em relação ao efeito provocado pelo parâmetro b, tal não é tão evidente.

No entanto, uma passagem por diversos valores de b, com utilização do seletor, vai criar a forte convicção de que o vértice da parábola descreve uma outra parábola, ou seja, que o lugar geométrico do vértice é uma parábola com a concavidade voltada para o lado oposto da parábola considerada.



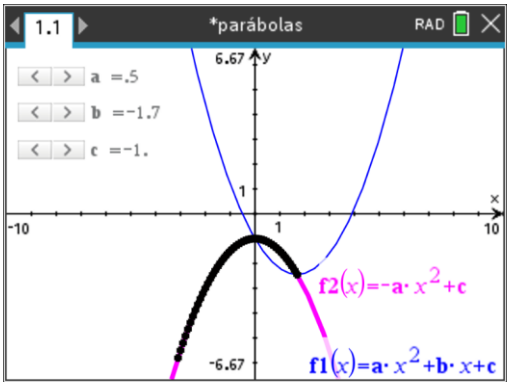




Note-se que as coordenadas do vértice se podem escrever na forma $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Podemos daqui chegar à formulação equivalente $\left(-\frac{b}{2a}, -a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c\right)$.

Designando por x a abcissa do vértice e por y a respetiva ordenada, conclui-se que $y = -ax^2 + c$, ou seja, uma equação da parábola que é lugar geométrico dos vértices das consideradas ao variar o parâmetro b. Pode confirmar-se visualmente com a representação gráfica de $y = -ax^2 + c$.



Pode considerar-se uma interpretação desta variação relacionando com a alteração da velocidade inicial na equação do movimento de um corpo lançado e em que se considera um referencial associado à experiência.

Função Quadrática

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Neste sentido, indo um pouco mais longe, o aluno pode ser convidado a fazer uma exploração da aplicação parábolas.tns de modo a prever com que velocidade inicial deve ser lançada uma moeda verticalmente de baixo para cima de uma janela de um apartamento localizada a 20 metros do solo para ultrapassar o topo do prédio, o qual está a uma altura de 30 metros. Considerando a aceleração da gravidade de $9{,}8\, m/s^2$ e desprezando a resistência do ar e dada uma velocidade inicial representada por $b\, m/s$, a expressão que relaciona a altura da moeda h em metros, em função do tempo t, em segundos pode ser dada por:

$$h(t) = 20 + bt - 4.9t^2.$$

Considerando o trabalho na tarefa anterior, o vértice da parábola que é representação gráfica desta função quadrática pode ser dada por:

$$\left(\frac{b}{9.8}, 4.9\left(\frac{b}{9.8}\right)^2 + 20\right)$$

Note-se que se pretende que $4.9\left(\frac{b}{9.8}\right)^2 + 20 > 30$, donde:

$$4.9 \times \frac{b^2}{4.9^2 \times 2^2} - 10 > 0 \Leftrightarrow b^2 - 196 > 0 \Leftrightarrow b > 14\ (dado\ que\ b > 0).$$

Deste modo conclui-se que a moeda deve ser lançada com mais de 1 para que a moeda ultrapasse o topo do prédio.

Esta situação de modelação proporciona ao aluno uma utilização imediata da primeira parte do trabalho, reforçando necessariamente a sua aprendizagem.