Funções do tipo $y = ax^2, a \neq 0$

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

Os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire para fazer conjeturas à volta de um problema envolvendo funções definidas por ax^2, numa estreita conexão com a geometria. Deverão também validar as conjeturas com recurso à prova, a qual poderá levar a um trabalho de operações com polinómios. Por isso, com esta atividade pretende-se:

- Aplicar o conhecimento da função afim e da função do tipo ax^2.
- Compreender o significado geométrico da representação gráfica de uma função.
- Rever os casos notáveis da multiplicação.
- Resolver problemas envolvendo geometria e funções

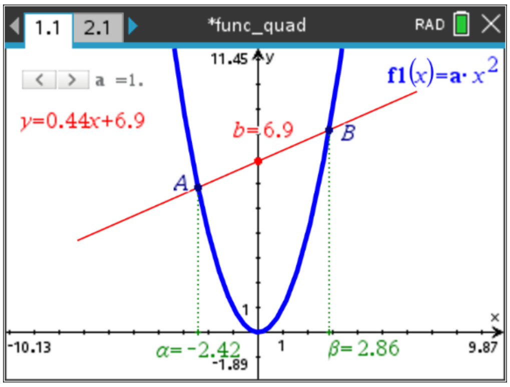
MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Ficheiro func_quad.tns
- Folha de tarefas

TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

Ao manipular a aplicação num tempo adequado deverão surgir conjeturas que poderão suscitar uma confirmação cabal com recurso á prova. Note-se que o declive da reta definida pelos pontos A(α, α^2) e B(β, β^2) pode ser escrito como:

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} = \alpha + \beta$$



Decorre daqui que o declive da reta é a soma das abcissas dos pontos onde esta é secante. Esta generalização revela que o mesmo é válido para pontos A e B no mesmo quadrante.
Utilizando este declive, é possível obter uma equação da reta secante como $y = (\alpha + \beta)x + b$.
Decorre daqui que $b = -\alpha\beta$, donde esta interseta o eixo das ordenadas no ponto cuja ordenada é simétrico do produto das abcissas dos pontos onde a reta é secante.

Funções do tipo $y = ax^2, a \neq 0$

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Poderá ainda observar-se que sendo $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$, o quadrado da diferença das abcissas dos pontos onde a reta é secante é a soma dos quadrados das respetivas ordenadas e o dobro da ordenada do ponto de interseção com o eixo das ordenadas.

Estas relações podem ser, da mesma forma, analisadas quando o coeficiente do termo quadrático da equação da parábola é variável.
Neste caso, o declive da reta pode escrever-se como:

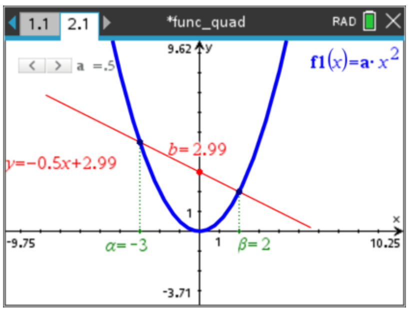
$$\frac{a\beta^2 - a\alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{a(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} = a(\alpha + \beta).$$

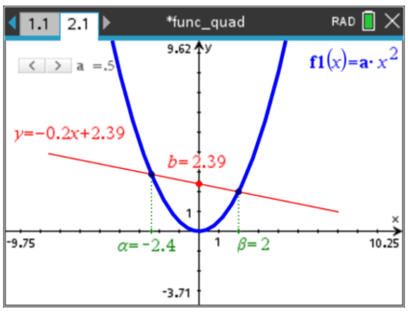
Deste modo, tem-se que o declive da reta é o resultado de multiplicar pelo coeficiente do termo quadrático a soma das abcissas dos pontos onde a reta é secante.

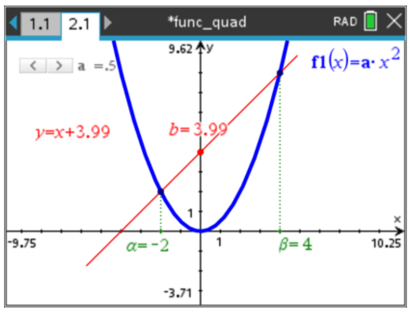
Da construção da equação $y = a(\alpha + \beta)x + b$ e resulta que a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo dos yy é:

$$b = a \times \alpha^2 - a(\alpha + \beta)\alpha = a \times (-\alpha\beta)\,.$$

Decorre daqui que a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas é o simétrico do produto das abcissas dos pontos onde a reta é secante, multiplicado pelo coeficiente do termo quadrático.







Note-se que a manipulação da aplicação pode revelar valores com ligeiro erro devido aos arredondamentos, o que leva a uma boa oportunidade de desenvolver o espírito crítico do aluno face à tecnologia.