Função Derivada até à exponencial

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

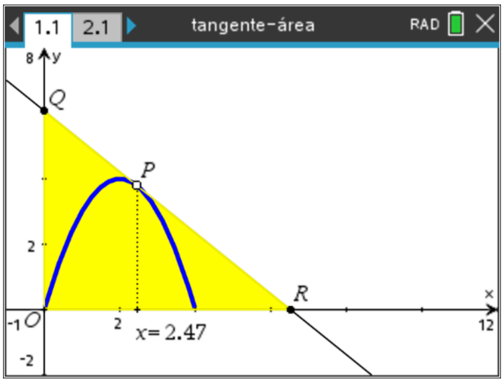
Os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire para trabalhar a derivada de uma função a diferentes níveis, começando por fazer revisão de assuntos que terão sido tratados no 11º ano e depois o transporte de conhecimento adquirido para um trabalho análogo em torno de uma função tratada no 12º ano, a função exponencial, isto quando já é capaz de calcular a derivada de uma função deste tipo .

É convidado a responder a questões que podem ser efetivas após um trabalho com a aplicação para realizar conjeturas.

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Ficheiro tangente-área.tns
- Folha de tarefas

TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS



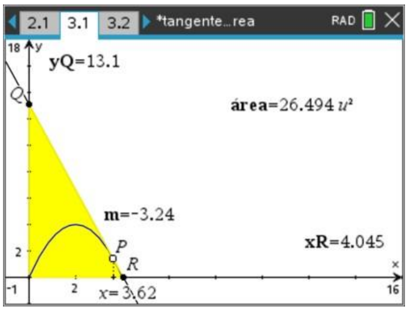
Começando por se considera a parte do 1º quadrante de uma parábola que é gráfico de uma função quadrática, o aluno vai deparar-se numa fase inicial com a necessita de determinar uma expressão analítica dessa função, recordando trabalho realizado no 10º ano. A parábola contém os pontos de coordenadas $(0,0)$, $(4,0)$ e $(2,4)$ e a equação que obtêm é $y = -x^2 + 4x$.

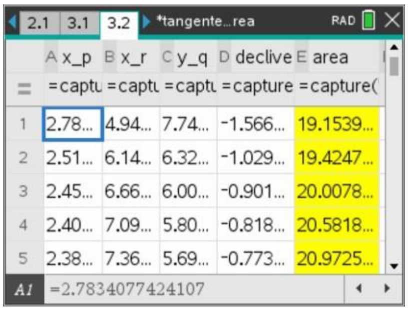
A primeira parte da **questão 1** pode ser respondida apenas com a identificação de que a reta tangente ao gráfico no vértice é paralela ao eixo das abcissas e como tal o domínio das funções f, g e h, funções que associam á abcissa de um ponto P sobre a parábola, a ordenada na origem da reta tangente ao gráfico nesse ponto, a abcissa na origem da mesma reta e a área do triângulo [ORQ], respetivamente. Deste modo, conclui-se que o domínio comum das funções é $]-2{,}4]$ e os contradomínios são $[4, +\infty[$ e $]4{,}16]$, respetivamente de g e de f. Para chegar ao último contradomínio é já necessário a obtenção da derivada em 4, mais uma oportunidade de revisão.

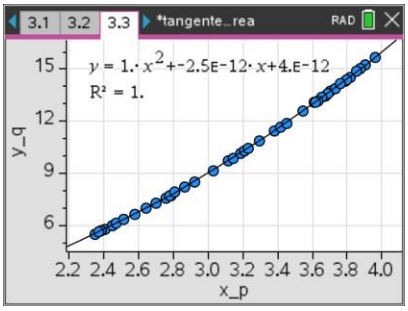
Função Derivada até à exponencial

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Para concluir sobre a resposta à **questão 2**, o aluno poderá começar por manipular a aplicação fornecida e conjeturar sobre a resposta, a qual pode concretizar em definitivo com a prova. É vantajoso que esta manipulação não fique apenas pela observação dos valores mas por um estudo de um número mais alargado de observações, utilizando a captura automática de dados em listas e regressão numa página de dados e estatística, depois de fazer uma representação da nuvem de pontos.







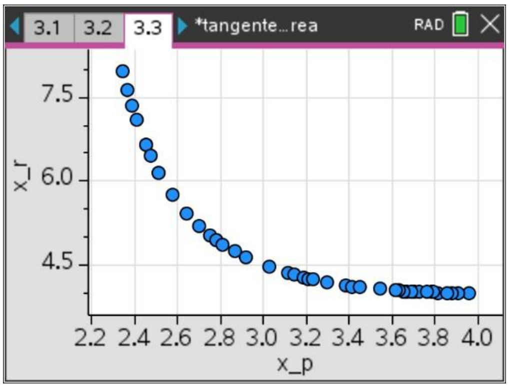
Embora pareça surpreendente, a ordenada na origem da reta tangente à parábola num ponto P é o quadrado da abcissa de P. Tal pode ser confirmado com alguns cálculos.

Sendo a a abcissa de P, o declive da reta tangente em P é dado por $-2a + 4$ e a respetiva reta tangente pode ser equacionada em função da ordenada na origem b por $y = (-2a + 4)x + b$.

Dado que o ponto de coordenadas $(a, -a^2 + 4a)$ pertence à reta, substituído obtêm-se $b = a^2$.

É tratada aqui a função derivada e tal pode ser motivação para mais um momento de revisão, incluindo da relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função.

Para responder à **questão 3**, uma análise idêntica á anterior, através da aplicação revela uma regularidade na relação entre as variáveis livre e dependente, mas de difícil deteção sem um trabalho analítico.



Utilizando a equação da reta tangente em função da abcissa a de P, tem-se que $0 = (-2a + 4)x + a^2$, donde se pode concluir que uma expressão analítica da função g pode ser dada por:

$$g(x) = \frac{x^2}{2x - 4}$$

Função Derivada até à exponencial

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Na **questão 4** chega-se à expressão da função h utilizando expressões obtidas nas questões anteriores, donde:

$$h(x)=\frac{x^2\times\frac{x^2}{2x-4}}{2}=\frac{x^4}{4x-8}.$$

Derivando, vem que

$$h'(x)=\frac{x^3(3x-8)}{(2x-4)^2}$$

Agora, um trabalho de revisão sobre o estudo de extremos de uma função está a iniciar-se.
Após elaboração do quadro de variação de sinal conclui-se cabalmente que a abcissa de P para a qual o triângulo tem área mínima é $\frac{8}{3}$. A equação pretendida é, portanto,

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{64}{9}.$$

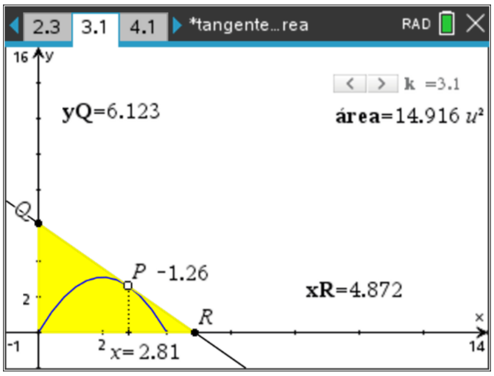
Não fazendo parte da questão, pode, no entanto, questionar-se sobre as dimensões do triângulo retângulo, concluindo-se que:

$$\overline{OQ}=\frac{64}{9}\ ;\ \overline{OR}=\frac{16}{3}\ e\ \overline{QR}=\frac{80}{9}.$$

Na verdade, um triângulo semelhante a um de dimensões 3, 4 e 5.

Quando se pretende ir ainda mais longe, considerando um valor de k $(k>0)$ par a a ordenada do vértice (antes tínhamos considerado $k=4$), conclui-se que a equação da parábola é agora:

$$y=-\frac{k}{4}x^2+kx\,.$$



Realizando trabalho análogo ao anterior, com um pouco mais de exigência ao nível do trabalho algébrico, pode concluir-se que:

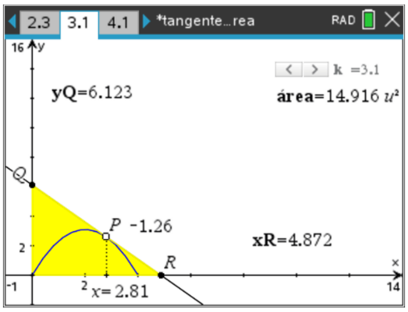
1. $D_f=D_g=D_h=]2{,}4]$ (não altera) , $D'_g=[4,+\infty[$ (não altera) e $D'_f=]k,4k]$.

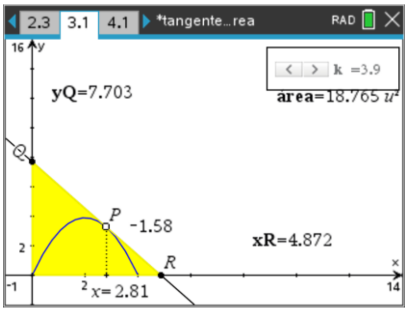
2. A ordenada de Q resulta da multiplicação do quadrado da abcissa de p por $\frac{k}{4}$, o simétrico do coeficiente quadrático da equação da parábola.

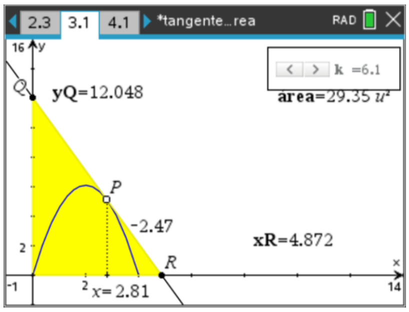
Função Derivada até à exponencial

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

3. Conclui-se que a abcissa de R não depende do valor de k, o que se pode conjeturar numa primeira análise com a aplicação fornecida.







4. Verifica-se que a abcissa de P para a qual a área do triângulo [ORQ] é mínima não depende do valor de k. A equação da reta é, assim:

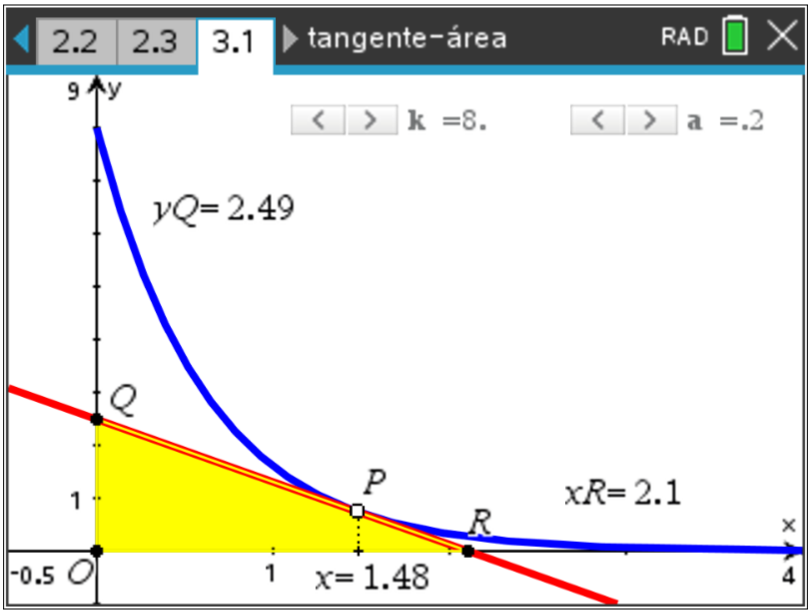
$$y = -\frac{k}{3}x + \frac{16k}{9}.$$

A última tarefa mobiliza o trabalho realizado nas anteriores para a função exponencial que permita um triângulo do tipo dos que têm sido considerados.

Considere-se então a curva definida por:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

E outra página da aplicação fornecida.

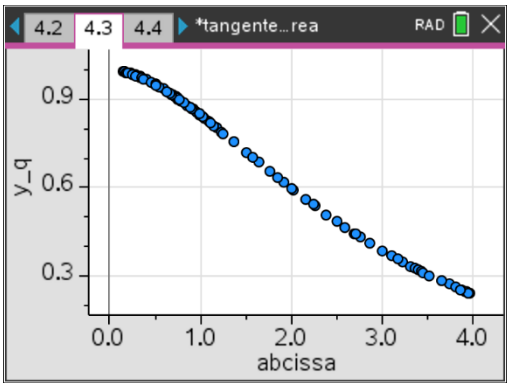


Função Derivada até à exponencial

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

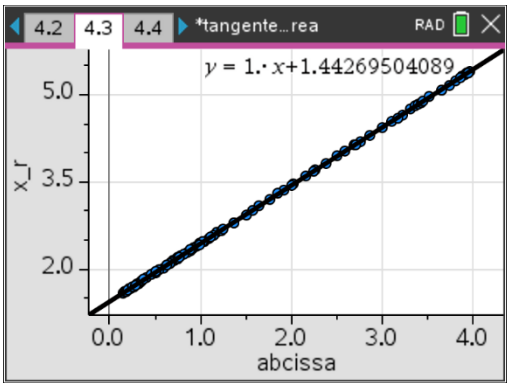
Neste caso, respondendo à **questão 1**, $D_f = D_g = D_h = [0, +\infty[$, $D'_g = \left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$ e $D'_f =]0,1]$.

Note-se que foi necessário determinar $y' = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e percebe-se assim que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 0 é $-\ln 2$ e consequentemente o valor mínimo de D'_g.

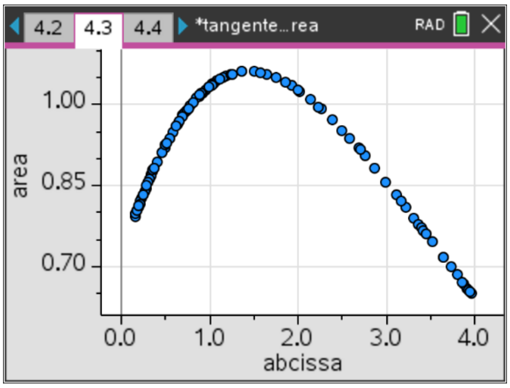


Dado que, para responder à **questão 2**, uma análise experimental da aplicação não proporciona uma boa conclusão sobre a relação, embora se observe que há alguma relação, um trabalho analítico é fundamental para que se conclua que $f(x) = (1 + \ln 2 \times x) \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Já quanto à **questão 3**, percebe-se perfeitamente uma relação linear de coeficiente 1, não sendo, no entanto, evidente o valor exato da ordenada na origem, que é $\frac{1}{\ln 2}$. Este valor obtém-se com um breve procedimento analítico.



Esta análise vem confirmar a observação surpreendente de que é constante a diferença entre a abcissa do ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas e a abcissa do ponto sobre o gráfico onde é traçada a reta tangente, o que se observa com a manipulação da aplicação tangente-área.tns.



A **questão 4** tem uma formulação que poderá admitir a existência de um triângulo de área mínima, mas apelando ao sentido crítico do aluno, observa-se que à medida que o ponto P se desloca no sentido da abcissa crescente, esta medida da área parece diminuir sucessivamente, mas não desde o início do domínio. Apelando uma vez mais ao sentido crítico do aluno, a manipulação da aplicação fornecida leva a vislumbrar um triângulo de área máxima e, assim, faz sentido a procura desse triângulo. Note-se que:

$$h(x) = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{(1 + x \times \ln 2)^2}{2^{x+1}}.$$

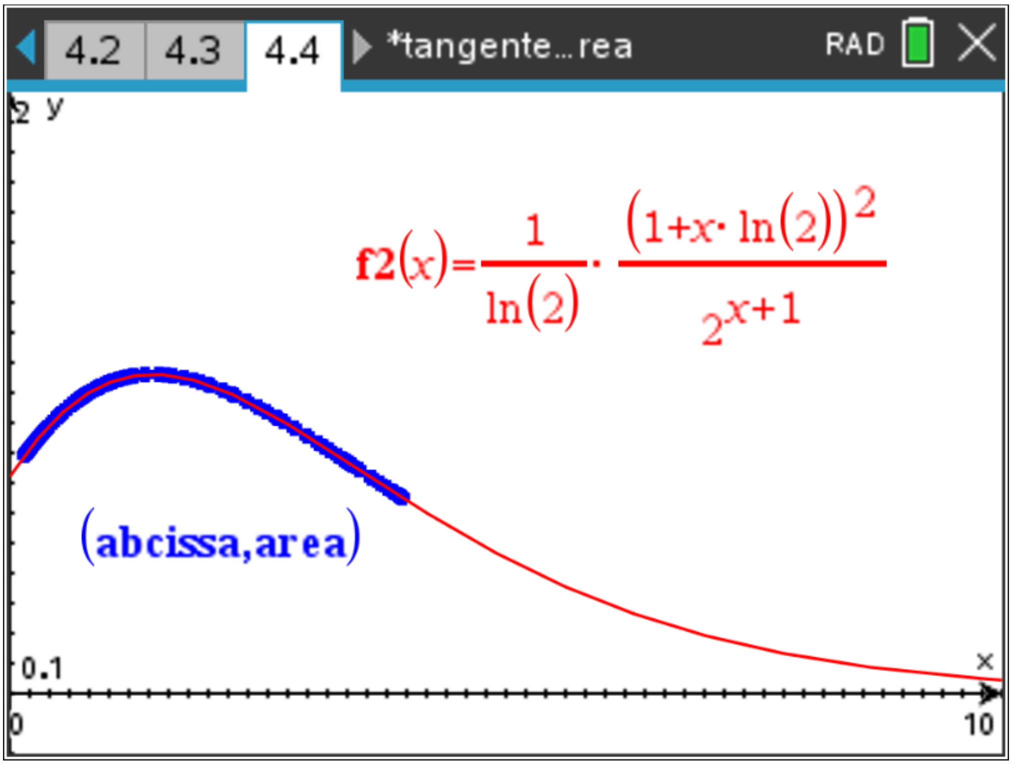
Função Derivada até à exponencial

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Decorre daqui que:

$$h'(x) = \frac{1-(\ln 2)^2 x^2}{2^{x+1}},$$

E consequentemente pode concluir-se que só a partir de $\frac{1}{\ln 2}$ a área começa a decrescer e que o triângulo para esta abcissa de P é o da área máxima, a qual se pode concluir que é $\frac{2}{e\times\ln 2}$, depois de fazer uso das propriedades das operações com logaritmos.



O trabalho com a curva $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ não é fácil, pelo que o tratamento num contexto de alteração de parâmetros em $y = ka^x, k > 0, 0 < a < 1$ deve ser bem ponderado.

Ficam aqui as expressões das funções consideradas e com isso a possibilidade da constatação do que os parâmetros influenciam ou não.

$$f(x) = ka^x(1 - x \times \ln a)$$

$$g(x) = x - \frac{1}{\ln a}$$

$$h(x) = \frac{a^x(x\times\ln a - 1)^2}{2\times\ln a}$$