Limites infinitos.

1. Descrição

A tarefa permite estudar a noção dos limites infinitos de uma sucessão, partindo de uma exploração intuitiva até às noções formais. Para tal, são estudadas as sucessões que se podem escrever na forma $u_n = an + b$.

Ficheiros: limites_infinitos.tns

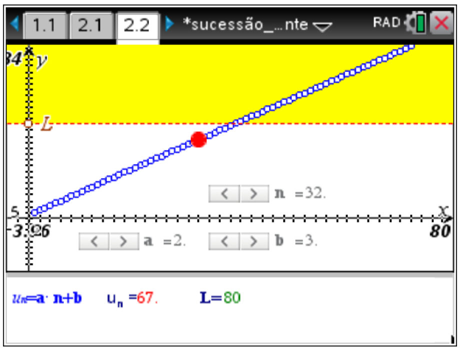
2. Metas Curriculares

Sucessões 11 – SUC11

6.5. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $+\infty$» ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n} u_n = +\infty$, $\lim u_n = +\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$, referir, nesta situação, que «u_n tende para $+\infty$» («$u_n \to +\infty$») e reconhecer que tal sucessão é divergente.

6.6. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $-\infty$» ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, $\lim\limits_{n} u_n = -\infty$, $\lim u_n = -\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$, referir, nesta situação, que «u_n tende para $-\infty$» («$u_n \to -\infty$») e reconhecer que tal sucessão é divergente (e não tende para $+\infty$).

3. Guia de utilização e de exploração



Os seletores a e b permitem definir diferentes progressões aritméticas. O ponto situado sobre o eixo das ordenadas permite definir diferentes números reais para L. O seletor n permite destacar o n-ésimo termo na representação gráfica da progressão.

Exercício 1

Exercício 1.1

Pretende-se que se defina uma progressão aritmética de razão não nula, por exemplo, $u_n = 2n + 3$. Através desta progressão será dado o conceito do limite $+\infty$.

Exercício 1.2

O objetivo deste exercício é levar a concluir que para qualquer número real positivo que se considere, a partir de uma certa ordem todos os termos são superiores a esse número real.

*De um modo geral, pode-se conjeturar que qualquer que seja o número real $L > 0$, existe uma ordem a partir do qual todos os termos da sucessão são **maiores** que L.*

Exercício 1.3

Resolvendo a inequação $u_n > L$ em ordem a n, obtém-se a ordem pretendida. A ordem depende da progressão definida na questão 1.1. Assim, de um modo geral, a ordem é maior ou igual a $\left\lceil \frac{L-b}{a} \right\rceil$.

Exercício 1.4

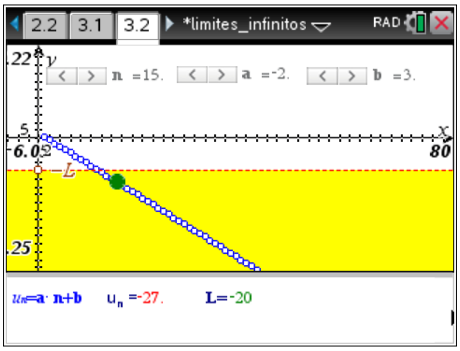
Pretende-se no exercício formalizar a noção de limite $+\infty$ de uma sucessão.

Como, para todo o $L > 0$, *existir uma ordem* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \boldsymbol{p} \Rightarrow u_n > L$, *o limite da sucessão* (u_n) *é* $+\infty$ ($\lim u_n = +\infty$), *ou seja,* u_n *tende para* $\underline{+\infty}$ («$u_n \to +\infty$»).
Note que se $\lim u_n = +\infty$, *é porque para todo o* $L > 0$, *existe uma ordem* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \boldsymbol{p} \Rightarrow u_n > L$.

Exercício 2

Exercício 2.1

Este exercício inicia o estudo da noção de limite $-\infty$ de uma sucessão.
Pretende-se que se defina uma progressão aritmética de razão não nula, por exemplo, $u_n = -2n + 3$.



Exercício 2.2

Analisando situações concretas, pretende-se conjecturar que:

... qualquer que seja o número real $L > 0$, *existe uma ordem a partir do qual todos os termos da sucessão são* ***<u>menores</u>*** *que* $-L$.

Exercício 2.3

Resolvendo a inequação $u_n < -L$ em ordem a n, obtém-se a ordem pretendida. Para as progressões que se podem definir na aplicação da página 3.2., a ordem é maior ou igual a $\left\lceil \frac{-L-b}{a} \right\rceil$.

Exercício 2.4

Pretende-se, no exercício, formalizar a noção de limite $-\infty$ de uma sucessão.

Como, para todo o $L > 0$, *existir uma ordem* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \boldsymbol{p} \Rightarrow u_n < -L$, *o limite da sucessão* (u_n) *é* $-\infty$ ($\lim u_n = -\infty$), *ou seja,* u_n *tende para* $\underline{-\infty}$ («$u_n \to -\infty$»).
Note que se $\lim u_n = -\infty$, *é porque, para todo o* $L > 0$, *existe uma ordem* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \boldsymbol{p} \Rightarrow u_n < -L$.

Exercício 3

O exercício permite conjeturar a relação entre o sinal de a das sucessões da forma $u_n = an + b, a \neq 0$ com o seu limite.

Exercício 3.1

$\lim(2n+3) = +\infty$

$\lim(-7n-3) = -\infty$

$\lim(n-5) = +\infty$

$\lim\left(\frac{3}{2}n\right) = +\infty$

$\lim\left(-\frac{5}{3}n+3\right) = -\infty$

$\lim\left(-\frac{n}{2}\right) = -\infty$

Exercício 3.2

Pode-se concluir que quando $a > 0$, $\lim(an+b) = +\infty$. Quando $a < 0$, $\lim an + b = -\infty$.