

## Sucessões e a Conjetura de Collatz

Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

### RESUMO E OBJETIVOS

A conjectura de Collatz, enunciada em 1937 pelo matemático alemão Lothar Collatz (1910-1990), é o problema base desta atividade em que os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire CX como ferramenta de cálculo rápido. Obtendo vários resultados (sequências numéricas) e analisando-os, os alunos deverão formular conjecturas e identificar propriedades à luz do tema de sucessões.

Pretende-se ainda que analisem, recorrendo à folha de cálculo e à representação gráfica, as sucessões obtidas e utilizem ferramentas computacionais que lhes facilite o cálculo. Para os mais audazes lança-se o desafio da programação em Python. Pela sua simplicidade e curiosidade que desperta, esta atividade será com certeza uma atividade motivacional. Por isso, com esta atividade pretende-se:

- Rever alguns procedimentos de cálculo numérico simples e recursivo.
- Conhecer e usar ferramentas de cálculo computacional.
- Definir uma sucessão analiticamente (por recorrência e por ramos).
- Rever o estudo de sucessões, nomeadamente monotonia, limitada, convergente e representação gráfica.
- Proporcionar uma experiência simples de programação em TI-Python.

### MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Folha de tarefas

### TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

Perante a questão de investigação lançada espera-se que o aluno, através de cálculo mental ou até recorrendo à calculadora do seu telemóvel, obtenha e registe os números da sequência resultante da aplicação do algoritmo ao seu dia de aniversário. Será importante o registo de todos os elementos da sequência, não só porque em caso de engano evita iniciar todo o processo, mas principalmente porque permitirá um olhar mais concentrado para a sequência e porque resultará na atribuição de maior valor ao cálculo computacional.

Para este primeiro cálculo manual, embora não seja colocada nenhuma questão sobre o que obteve, será normal que os outros vão já se apercebendo de algumas regularidades que tenderão



## Sucessões e a Conjetura de Collatz

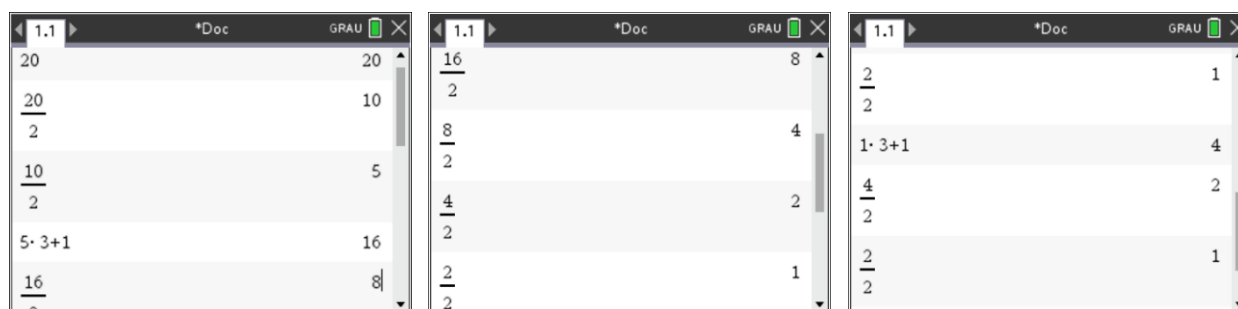
Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

a verbalizar para a turma. Para que todos tenham a possibilidade de sentir o gosto pela descoberta e também pela dificuldade de cálculo, será bom que o professor limite e até proíba a verbalização por parte dos alunos mais adiantados.

De seguida apresentam-se alguns ecrãs da TI-Nspire CX II que exemplificam uma possível resolução da atividade.

### A SEQUÊNCIA COM O TEU DIA DE ANIVERSÁRIO

Nesta primeira parte da atividade, destaca-se como relevante a utilização da variável **Ans** (do inglês *answer* que significa resposta) para a facilidade e rapidez do cálculo. Assim, por exemplo para o número 20 temos:



Para os alunos cuja a sua sequência de números rapidamente chegou a 1, entrando no ciclo 4, 2 e 1, sugere-se que o professor proponha a execução com outro número natural. Desta forma haverá tempo para que todos façam pelo menos uma vez este cálculo com recurso à tecnologia.

Após estas experiências, o professor deverá moderar uma discussão sobre o que observaram os alunos e como podem traduzir essa informação de forma correta, através de uma conjectura.

### A SEQUÊNCIA COMO UMA SUCESSÃO DEFINIDA POR RECORRÊNCIA

A sucessão obtida por cada aluno tem a particularidade de resultar do primeiro termo ser o seu dia de nascimento, pelo que existirão várias sucessões distintas. No entanto, poder-se-á discutir com os alunos o facto de todas elas a partir de uma certa ordem serem iguais.

Considerando aqui o dia de aniversário ser dia 20, então a sucessão ficará definida analiticamente pela expressão:

$$\begin{cases} u_1 = 20 \\ u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 \times u_n + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, & \text{para } n > 1 \end{cases}$$

Quanto ao estudo da sucessão obtida por cada um dos alunos, apesar dos termos iniciais e em número finito poderem ter comportamentos distintos, a sucessão não é monótona, pois pelo menos

## Sucessões e a Conjetura de Collatz

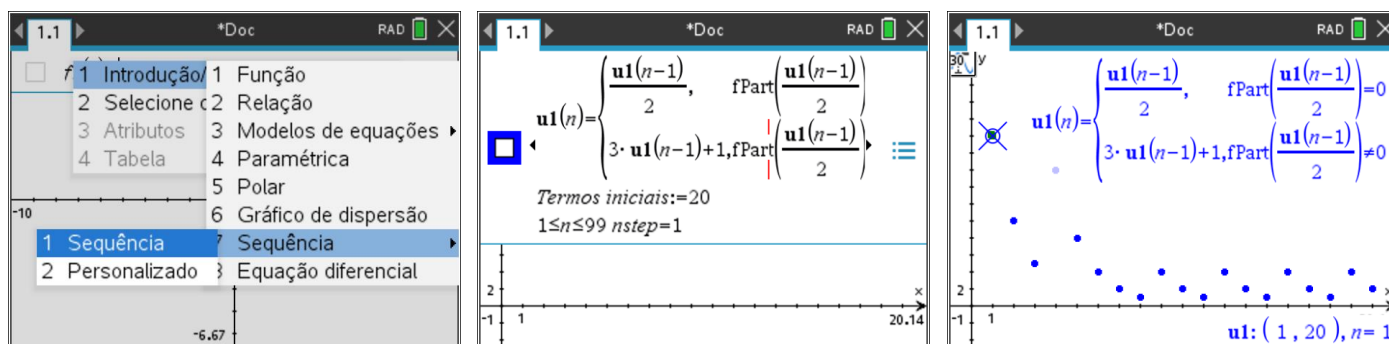
Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

a partir de uma certa ordem (a menor ordem cujo termo é igual a 1) a sucessão é decrescente para os termos 4, 2 e 1, mas de seguida cresce para 4.

A sucessão será sempre limitada, pois o número de termos até a sucessão tomar o valor 1 é finito, e, portanto, haverá um valor máximo para esses termos. Quanto ao valor mínimo, será 1. Assim, a sucessão será majorada e minorada, logo limitada.

Embora limitada, a sucessão não é convergente pois os seus termos não tendem para nenhum número real (neste caso seria natural).

Definida analiticamente a sucessão, poder-se-á obter a sua representação gráfica numa página de Gráficos usando o tipo de gráficos Sequência, conforme se ilustra nas imagens a abaixo:



Esta representação poderá ser explorada apenas após a tarefa “Representação Gráfica da Sucessão”, onde também será discutido com os alunos como definir, em termos computacionais, uma condição que verifique se um número é par ou ímpar.

### MAIS SEQUÊNCIAS E ALGUMAS CARACTERÍSTICAS

Alargando a discussão a toda a turma, e dando a possibilidade de os alunos obterem mais sequências, procurando estratégias que lhes permita, por exemplo, atingir mais rapidamente o primeiro termo igual a 1, o professor deverá conduzir os alunos à identificação de características comuns ou particulares das suas sucessões.

Para a sucessão que temos vindo a usar, com  $u_1=20$ , teremos as seguintes respostas:


- o majorante é o 1º termo
- os termos da sucessão até ao primeiro termo igual a 1, isto é, os 8 primeiros termos não são decrescentes (embora existam sucessões em que isso possa acontecer, sempre que o 1º termo for uma potência de 2. Observação que se espera seja realizada pelos alunos.)
- a menor ordem em que o termo é igual a 1, neste caso é 8, isto é, ao fim de 8 termos a sucessão “entra” no ciclo 4, 2, 1.

## Sucessões e a Conjetura de Collatz

Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

### EXPLORAR MAIS SEQUÊNCIAS COM RECURSO À TECNOLOGIA

Nesta parte da atividade deverá ser proporcionado aos alunos a exploração das várias ferramentas numéricas da página de Calculadora da TI-Nspire CX II, procurando que seja o aluno a identificar alguma que lhe permita, de forma computacional, identificar se um número é par ou ímpar.

Colocam-se, abaixo, algumas passíveis de serem usadas e disponíveis no menu (tecla ) da aplicação:

- Resto - **remain(a,b)** - resto da divisão de **a** por **b**
- Parte decimal - **fPart(número)** - parte decimal do número

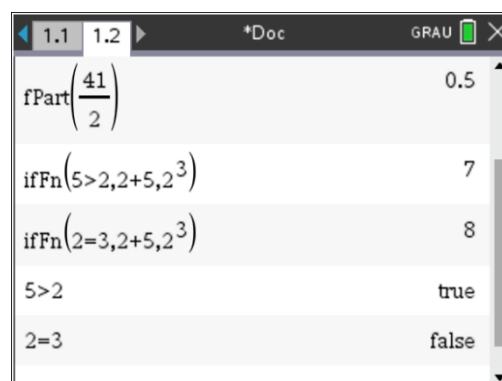
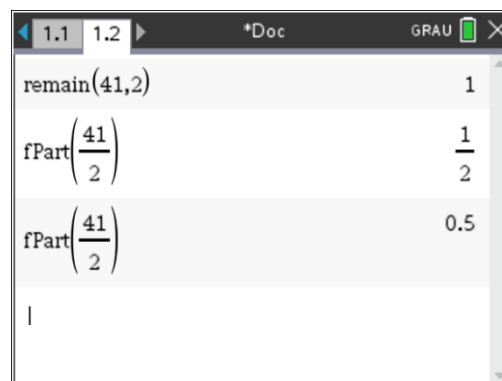
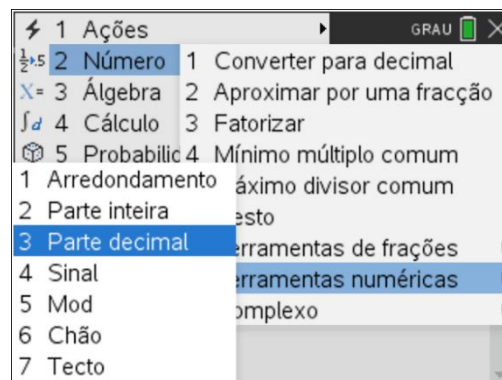
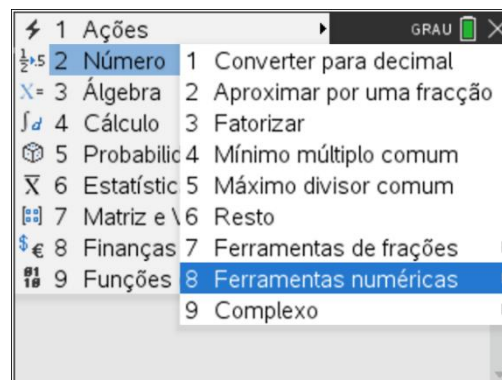
Após a procura da melhor forma computacional de verificar se um número natural é par ou ímpar, o professor deverá explorar a ferramenta condicional **ifFn()**, que não será mais do que em linguagem corrente os alunos dirão:

**se** (P for verdade) **então** (faz-se A) **senão** (faz-se B)

Começando com exemplos prático bem simples, por exemplo com proposições como  $5 > 2$  (verdadeira) ou  $2 = 3$  (falsa), e instruções  $2+3$  (para A) e  $2^3$  (para B), o professor deve levar os alunos a entenderem esta ferramenta condicional e desafiá-los a construírem mais alguns exemplos. Um exemplo interessante será, depois de atribuir um valor à variável **h** (fazendo  $h:=15$ ), inserir a condição:

**ifFn(h>12,"Boa tarde!","Bom dia!")**

Após este momento de exploração da ferramenta, o professor deve solicitar aos alunos que a usem, em conjunto com a variável **Ans**, para gerarem os termos das suas sucessões.



### REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA SUCESSÃO

A representação gráfica da sucessão permitirá aos alunos observarem de forma mais clara algumas

## Sucessões e a Conjetura de Collatz

Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

das propriedades já discutidas anteriormente.

Permitirá ainda obter mais rapidamente o maior termo da sucessão e assim fazer o seu enquadramento. Também permitirá obter a ordem do primeiro termo igual a 1.

Com já referido, a representação gráfica pode ser obtida através da expressão analítica que define a sucessão por recorrência, no entanto parece-nos mais rica a exploração deste tópico através da obtenção de alguns elementos da sucessão numa folha de cálculo.

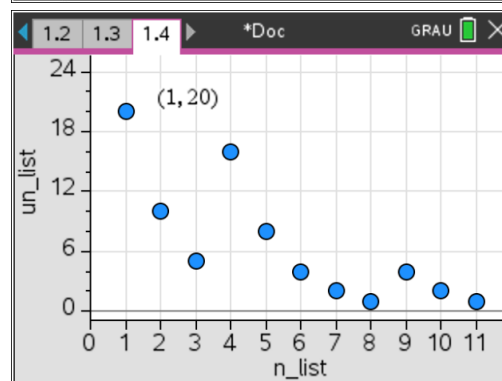
Partindo da folha de cálculo, com os dados guardados em listas, numa página de Dados e Estatística obtém-se a representação gráfica dos elementos obtidos.

Assim, observa-se que:

- majorante é o 1º termo,  $u_1=20$ ;
- do 4º termo ( $u_4=16$ ) ao 8º termo ( $u_8=1$ ) a sucessão é decrescente, sendo os termos iguais a potências de base 2 ( $u_4=2^4$ ;  $u_5=2^3$ ;  $u_6=2^2$ ;  $u_7=2^1$  e  $u_8=2^0$ );
- a sucessão “apanhou a corrente” das potências de 2 ao 4º termo;
- a sucessão atingiu o valor 1 ao 8º termo, poderá designar-se “comprimento” da sucessão.

A n_list	B un_list	C
=seq(n,n,1,dim(un_list))		
1	20	
2	10	
3	5	
4	16	

A n_list	B un_list	C
=seq(n,n,1,dim(un_list))		
8	1	
9	4	
10	2	
11	1	



## INDO MAIS ALÉM

A programação e o pensamento computacional são os desafios lançados aos alunos. Pretende-se que os alunos explorem a linguagem de programa Python e recorrendo à aplicação TI-Python construam um programa similar ao constante nas imagens abaixo.

```

collatz.py guardado com sucesso
from math import *
from time import *
print("CONJETURA DE COLLATZ")
n=int(input("Indica um número natural: "))
u1=n
n_termos=1
while n>1:
    if n%2==0:
        n=n//2
    else:
        n=3*n+1
    n_termos+=1
    print(n)
    sleep(1)
print("Para n=",u1," o nº termos até atingir 1 é ",n_termos)
    
```

```

Shell Python 13/13
CONJETURA DE COLLATZ
Indica um número natural: 20
10
5
16
8
4
2
1
Para n= 20 o nº termos até atingir 1 é 8
>>>
    
```