

Sucessões e a Conjetura de Collatz

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Pensa num número natural, por exemplo no teu número preferido ou no teu dia de aniversário!

O número em que pensaste é par ou ímpar?

Se for um número par, divide-o por 2, senão, se for ímpar, multiplica-o por 3 e adiciona 1. Obterás um novo número natural!



Esse novo número é par ou ímpar? Se for um número par ... e obterás um novo número!

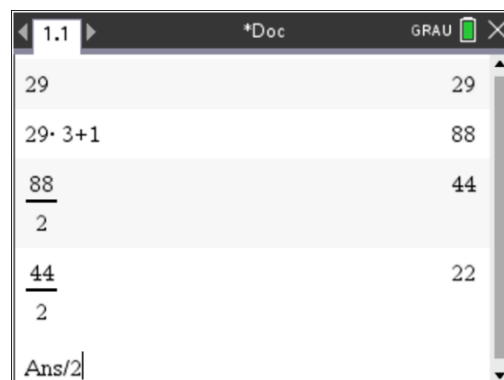
Bem, já percebeste!!! Continua esta sequência de instruções e vai registando os números que vais obtendo!


A SEQUÊNCIA COM O TEU DIA DE ANIVERSÁRIO

Na tua TI-Nspire CX II, numa página de Calculadora, começa por inserir o número correspondente ao teu dia de aniversário.

De seguida pressionar a tecla .

Se for par divide-o por 2, para isso bastará clicar da tecla de divisão, , e de seguida na tecla . Estarás a usar a opção **Ans**, isto é, a recorrer de imediato ao último resultado da tua calculadora.



Se for ímpar multiplica-o por 3 e adiciona 1, sendo que ao clicares na tecla de multiplicação, , surgirá de imediato a variável **Ans**.

Repete este processo. Regista os números que vais obtendo na tua sequência. Como relatás o que acontece com a sequência que geraste?

A SEQUÊNCIA COMO UMA SUCESSÃO DEFINIDA POR RECORRÊNCIA

A sequência numérica que acabaste de obter é uma sucessão, em que os seus termos são os números que vais obtendo após cada etapa do algoritmo acima definido.

Designando a sucessão por (u_n) , defini-a analiticamente por recorrência e por ramos.

A sucessão (u_n) é monótona? E limitada? E convergente? Justifica!

Sucessões e a Conjetura de Collatz

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

MAIS SEQUÊNCIAS E ALGUMAS CARACTERÍSTICAS

Cada um dos teus colegas de turma obteve a sua sucessão por recorrência, partindo do primeiro termo, u_1 , igual ao seu dia de aniversário.

Discute com os teus colegas algumas características das respetivas sucessões, como por exemplo, alguma das sucessões obtidas têm como majorante o 1º termo? Quais? Ou, qual a menor ordem em que o termo é igual a 1?

EXPLORAR MAIS SEQUÊNCIAS COM RECURSO À TECNOLOGIA

Por vezes a investigação matemática requer muitos cálculos e a análise de muitos dados, para tal a tecnologia através do cálculo computacional são ferramentas preciosas.

Vejamos como podes na TI-Nspire CX II obter mais rapidamente os termos de uma dada sucessão por recorrência definida anteriormente.

Começa por experimentar cada uma das seguintes ferramentas, escrevendo-as numa página de Calculadora:

- **fPart(número)**
apresenta a parte decimal do número
- **ifFn(proposição, se verdade, se falso)**
se a proposição for verdadeira efetua o que estiver em “se verdade”, se for falsa o que estiver em “se falso”.
- **Ans**
a variável **Ans** toma o valor do último resultado da calculadora.

Com estas instruções bastará escrever o termo inicial, o número natural de partida, de seguida introduzir a instrução:

$$\text{ifFn}(\text{fPart}(\text{Ans}/2)=0, \text{Ans}/2, \text{Ans} \cdot 3+1)$$

e clicar sucessivamente na tecla .

Surgirão os vários termos da sucessão, sendo muito mais rápido obter-se o primeiro termo igual a 1. Experimenta.

$f\text{Part}\left(\frac{44}{2}\right)$	0
$f\text{Part}\left(\frac{57}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
$\text{ifFn}\left(f\text{Part}\left(\frac{88}{2}\right)=0, \frac{88}{2}, 88 \cdot 3+1\right)$	44
$\text{ifFn}\left(f\text{Part}\left(\frac{101}{2}\right)=0, \frac{101}{2}, 101 \cdot 3+1\right)$	304

27	27
$\text{ifFn}(f\text{part}(\text{ans}/2)=0, \text{ans}/2, \text{ans} \cdot 3+1)$	

27	27
$\text{ifFn}\left(f\text{Part}\left(\frac{27}{2}\right)=0, \frac{27}{2}, 27 \cdot 3+1\right)$	82
$\text{ifFn}\left(f\text{Part}\left(\frac{82}{2}\right)=0, \frac{82}{2}, 82 \cdot 3+1\right)$	41
$\text{ifFn}\left(f\text{Part}\left(\frac{41}{2}\right)=0, \frac{41}{2}, 41 \cdot 3+1\right)$	124

Sucessões e a Conjetura de Collatz

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA SUCESSÃO

Vejamos agora como usar a tecnologia TI-Nspire CX II para obter uma representação gráfica de uma das sucessões até agora obtidas.

Numa página de **Listas e Folha de Cálculo**, designa a coluna A por **n_list** e a coluna B por **un_list**.

Na célula **b1** coloca o termo inicial, isto é, o número natural inicial. Na imagem ao lado na célula com fundo amarelo.

Na célula **b2** coloca a fórmula que te permite determinar o 2º termo em função do 1º termo, isto é, a fórmula:

$$=ifFn(b1/2)=0,b1/2,b1*3+1)$$

De seguida arrasta esta fórmula para as células abaixo até obteres pelo menos uma vez o número 1. Também poderás arrastar a fórmula até surgir o “ciclo” 4, 2, 1 .

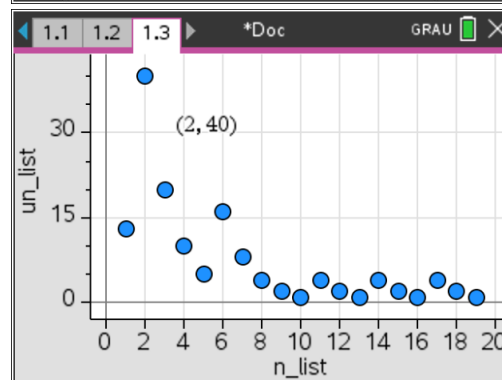
Por fim, na expressão geradora da coluna A, lista **n_list**, insere a fórmula que te permitirá introduzir a ordem dos termos obtidos:

$$seq(n, n, 1, dim(un_list))$$

Por fim, adiciona uma página de **Dados e Estatística** e coloca como variável independente a lista **n_list** e como variável dependente a lista **un_list**. Obterás a representação gráfica da tua sucessão, sendo mais fácil observar o seu máximo.

A n_list	B un_list	C
=seq(n,n,1,dim(un_list))		
1	13	
2	40	
3	20	
4	10	
B2 =ifFn(fpart(b1/2)=0,b1/2,b1*3+1)		

A n_list	B un_list	C
=seq(n,n,1,dim(un_list))		
12	2	
13	1	
14	4	
15	2	
B13 =ifFn(fpart(b12/2)=0,b12/2,b12*3+1)		



INDO MAIS ALÉM

O pensamento computacional, nomeadamente a algoritmia e programação, são competências tidas como essenciais no mundo profissional de hoje, e mais ainda no futuro.

A linguagem de programação Python é uma das mais utilizadas no mundo, e na tua TI-Nspire CX II tens a oportunidade de a explorar através da aplicação TI-Python.

Assim, pesquisando na web e com a ajuda dos teus colegas e do teu professor, cria um programa na aplicação TI-Python para se obter para um qualquer número natural os termos da sucessão, o número de termos até se obter 1 e a sua representação gráfica.

```

Shell Python 117/117
40
20
10
5
16
8
4
2
1
Para n= 27 o nº termos até atingir 1 é 112
>>>
    
```