

## Raízes e Coeficientes de um Polinómio do 3º Grau

Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

### RESUMO E OBJETIVOS

Nesta atividade os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire CX para formularem conjecturas sobre relações algébricas entre os coeficientes e as raízes de um polinómio do 3º grau. Deverão também validar as conjecturas com recurso à prova, a qual leva a um trabalho com operações algébricas como factorização, desenvolvimento e igualdade entre polinómios.

Por isso, com esta atividade pretende-se:

- Aplicar o conhecimento sobre equações de 2º grau, em particular utilizar corretamente termos como coeficientes e raízes e ainda a determinação das suas raízes.
- Definir um polinómio de 3º grau através dos seus coeficientes e determinar as suas raízes.
- Desenvolver competências de decisão quanto à necessidade e importância do uso da tecnologia como facilitadora do cálculo, não substituindo o cálculo algébrico manual.
- Explorar as ferramentas de resolução de equações e de folha de cálculo da TI-Nspire CX II.
- Desenvolver o pensamento crítico e reflexivo e a capacidade de análise de dados e observação de regularidades.

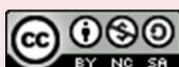
### MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Folha de tarefas
- Ficheiro invest\_polinomios\_girard.tns

Esta atividade de investigação poderá ser aplicada em sala de aula com diferentes estratégias pedagógicas e diferentes níveis de aprofundamento, dependendo da dinâmica da turma, dos hábitos de trabalho ao nível da investigação matemática e, ainda, do nível de autonomia dos alunos.

Também as condições quanto ao número de equipamentos disponíveis poderão influenciar a metodologia a adoptar, no entanto realça-se aqui que o professor, ou a escola, poderá recorrer aos programas de apoio disponibilizados pela Texas Instruments ([education.ti.com/pt](http://education.ti.com/pt)).

Considera-se que, preferencialmente, esta atividade de investigação seja realizada em pares, admitindo-se que exista pelo menos uma unidade portátil (calculadora) ou software TI-Nspire CX II por cada par de alunos, e implementada em sala de aula, embora também possa ser proposta como atividade extra aula, após o término da decomposição de polinómios.



## Raízes e Coeficientes de um Polinómio do 3º Grau

Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

### TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

Como tarefa prévia à atividade o professor poderá propor aos alunos uma pequena pesquisa na web sobre o matemático Albert Girard, realizada fora da sala de aula, e iniciar esta atividade convidando um aluno a apresentar, para toda a turma, este matemático francês.

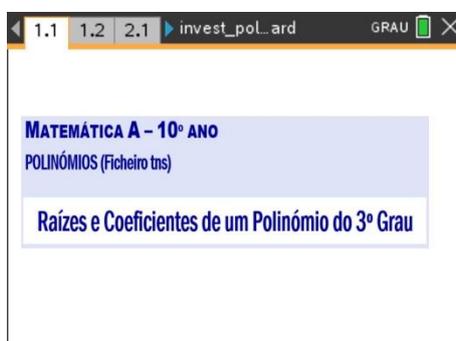
Iremos percorrer esta atividade, dividindo-a em Tarefas que os alunos terão que realizar, apresentando possíveis resoluções e sugestões metodológicas.

#### TAREFA 1 – Abrir e explorar o ficheiro invest\_polinomio\_girard.tns

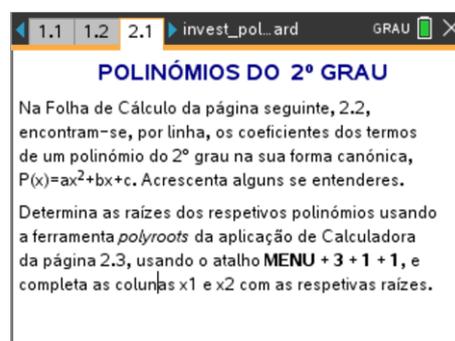
O primeiro desafio, mas também fator motivacional, para os alunos poderá ser abrir e explorar o ficheiro tns da TI-Nspire CX II. Como ajuda, colocam-se abaixo alguns ecrãs e instruções básicas.



- Tecla **[on]** e opção **2 Procurar**



- Abre na página 1.1 e usa os atalhos **[ctrl] + [D]** (mover para a direita) e **[ctrl] + [A]** (mover para a esquerda)

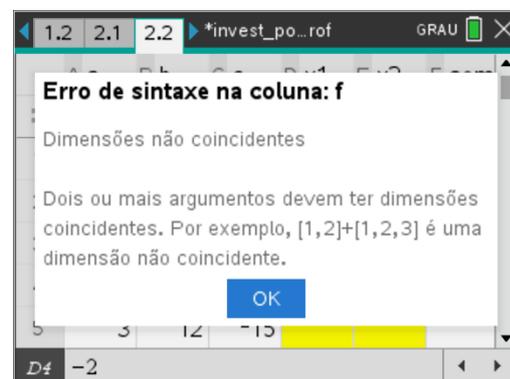


- Página 2.1 com instruções acerca da 1ª investigação. Usa o tapete do rato para deslocar o cursor.

As páginas 1.1, 1.2, 2.1 e 3.1, do documento tns, são páginas de Notas, isto é, o género de um simples editor de texto, mas no qual é possível integrar todas as ferramentas da TI-Nspire CX II.

As páginas 2.2 e 3.2 são folhas de cálculo, serão as páginas onde o aluno terá que inserir as raízes das equações e completar a tabela com várias fórmulas em função da sua investigação. Para inserir, nas células respetivas, as raízes das equações deverá usar as habituais teclas da calculadora.

Dado nas colunas F, G, H e I estarem já inseridas as expressões designatórias geradoras e ser dependentes das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , as raízes do polinómio, sempre que o aluno inserir a primeira raiz,  $x_1$ , surgirá uma mensagem de erro, mas que desaparecerá ao se inserir a segunda raiz,  $x_2$ .



## Raízes e Coeficientes de um Polinómio do 3º Grau

Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

Note-se que nas expressões geradoras, por exemplo na da coluna F, observável e editável na linha ao fundo do ecrã ( $=x1+x2$ ), as variáveis surgem com uma plica antes, por exemplo 'x1, o que significa que está referenciada/associada a uma variável.

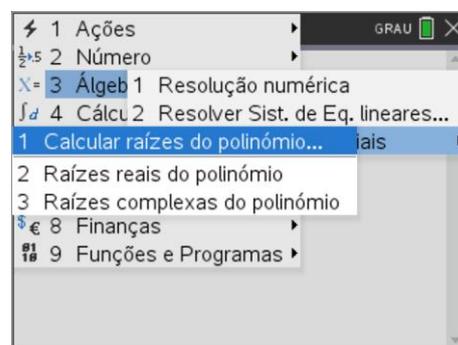
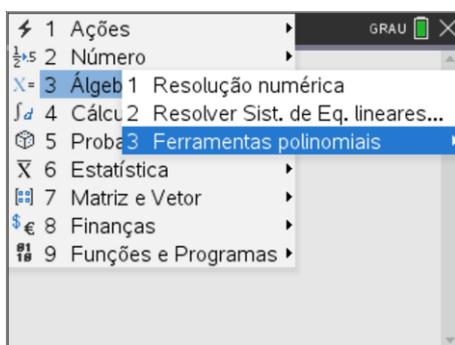
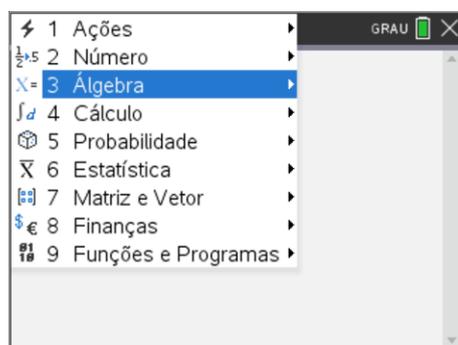
A página 2.3 do documento é uma página de Calculadora. Nesta página os alunos terão apenas que usar a ferramenta algébrica que permite determinar as raízes de um polinómio, no caso do 2º grau. Esta ferramenta será usada com muita regularidade pelos alunos durante o Ensino Secundário, e esta poderá ser uma primeira abordagem a essa importante ferramenta.

Para obter as raízes do polinómio o aluno deverá clicar na tecla **menu**, selecionar a opção **3: Álgebra**, seguida da opção

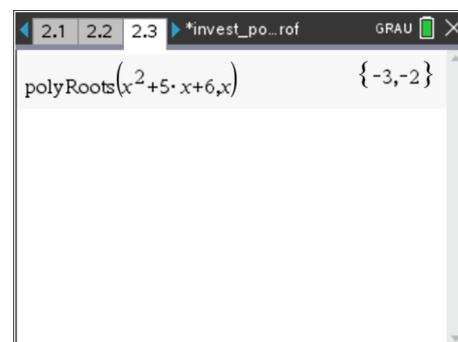
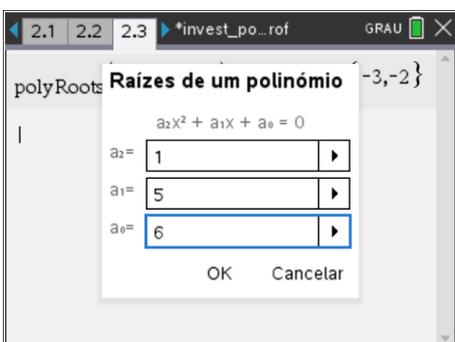
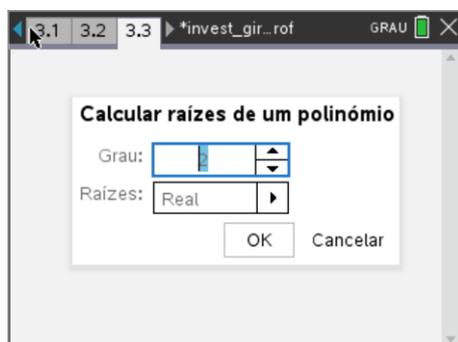
**3: Ferramentas polinomiais** e finalmente a opção **1: Calcular raízes do polinómio...**, conforme ecrãs abaixo. Esta sequência de instruções pode ser executada rapidamente clicando sucessivamente nas teclas **menu**, **3**, **3**, **1**.

	A	B	C	D	E	F
4	1	-1	-6	-2	3	
5	3	12	-15	-5	1	
6	0.5	0.5	-1.8...	-2.5	1.5	
7	-1	0.5	10.5	-3	3.5	
8	-3	-12	231	-11	7	

polyRoots( $x^2+5\cdot x+6,x$ )	{-3,-2}
polyRoots( $2\cdot x^2-4\cdot x-6,x$ )	{-1,3}
polyRoots( $1\cdot x^2-1\cdot x-6,x$ )	{-2,3}
polyRoots( $3\cdot x^2+12\cdot x-15,x$ )	{-5,1}
polyRoots( $0.5\cdot x^2+0.5\cdot x-1.875,x$ )	{-2.5,1.5}



De seguida surgirão janelas para o aluno indicar o grau do polinómio e os coeficientes dos seus termos, clicando no fim na tecla **enter** para obter as raízes.



## Raízes e Coeficientes de um Polinómio do 3º Grau

Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

Note-se que, deve-se alertar os alunos que embora o resultado apresentado pela calculadora esteja na forma habitual de conjunto (por ter chavetas), não é esse o significado neste ambiente computacional. Aqui trata-se de uma lista de valores, que podem ser repetidos, como por exemplo nas raízes duplas.

### TAREFA 2 – 1ª Questão de Investigação

Nesta primeira questão de investigação os alunos terão apenas que procurar regularidades/relações entre números ou lista de números, sendo este um processo importante que envolve uma grande capacidade de análise de dados.

No entanto, e como estratégia metodológica esta atividade encontra-se bastante dirigida e fechada, pelo que será relativamente fácil os alunos por observação verificarem que relações.

Desta forma será imediata a formulação da conjectura.

Poder-se-á adaptar a atividade e nesta 1ª investigação permitir que seja o aluno a tentar

	a	b	c	D x1	E x2	F soma	G	H produto	I
=						=x1+x2	=-b/a	=x1*x2	=(c)/(a)
1	1	2	1	-1	-1	-2	-2	1	1
2	1	5	6	-3	-2	-5	-5	6	6
3	2	-4	-6	-1	3	2	2	-3	-3
4	1	-1	-6	-2	3	1	1	-6	-6
5	3	12	-15	-5	1	-4	-4	-5	-5
6	0.5	0.5	-1.8...	-2.5	1.5	-1.	-1.	-3.75	-3.75
7	-1	0.5	10.5	-3	3.5	0.5	0.5	-10.5	-10.5
8	-3	-12	231	-11	7	-4	-4	-77	-77
9									

construir as expressões designatórias com os coeficientes **a**, **b** e **c** de forma a obter uma relação com a soma e o produto das raízes. Para tal, aconselha-se a consulta da atividade proposta nestes recursos da TI, para o 9ºano de escolaridade, com o nome “Equações 2º grau - Albert Girard”.

### TAREFA 3 – 2ª Questão de Investigação

Nesta segunda questão de investigação, os alunos irão por processo análogo explorar as relações entre os coeficientes e as 3 raízes reais de um polinómio de 3º grau.

Num primeiro momento terão que consultar na página 3.2 os valores dos coeficientes dos vários polinómios, para de seguida e usando mais uma vez a ferramenta **polyRoots** determinarem as 3 raízes dos respetivos polinómios.

	A a	B b	C c	D d	E x1	F x2	G x3
1	1	-2	-1	2	-1	1	
2	2	11	17	6			
3	1	0	-7	-6			
4	2	0	-6	-4			
5	1	5.5	1	-7.5			

Raízes e Coeficientes de um Polinómio do 3º Grau

Eduardo Cunha  
Raul Aparício Gonçalves

Após inserirem, nas colunas E, F e G e nas respetivas linhas, as três raízes reais (x1, x2 e x3) de cada polinómio os alunos deverão observar as expressões designatórias e os valores das colunas H, I, J, K, L e M.

	A a	B b	C c	D d	E x1	F x2	G x3	H s
1	1	-2	-1	2	-1	1	2	
2	2	11	17	6	-3	-2	-1/2	
3	1	0	-7	-6	-2	-1	3	
4	2	0	-6	-4	-1	-1	2	
5	1	5.5	1	-7.5	-5	-1.5	1	
6	1	6	11	6	-3	-2	-1	
7	6	24	25.5	7.5	-2.5	-1	-0.5	
8	1	0	-4	0	-2	0	2	

Mais uma vez, por simples observação os alunos formularão as suas conjeturas.

	soma	I	J som_prod	K	L produto	M
	$x^1+x^2+x^3$	$=-b/a$	$=x^1*x^2+x^1*x^3+x^2*x^3$	$=c/a$	$=x^1*x^2*x^3$	$=-d/a$
1	2	2		-1	-1	-2
2	-11/2	-11/2		17/2	17/2	-3
3	0	0		-7	-7	6
4	0	0		-3	-3	2
5	-5.5	-5.5		1	1	7.5
6	-6	-6		11	11	-6
7	-4	-4		4.25	4.25	-1.25
8	0	0		-4	-4	0

TAREFA 3 – A prova da conjetura

Esta prova envolve alguns conhecimentos adquiridos no 10º de escolaridade, como a decomposição em fatores de um polinómio, através das suas raízes reais, o desenvolvimento de polinómios e a igualdade de polinómios. Vejamos a prova.

Seja P(x) um polinómio do 3º grau definido na sua forma canónica por  $P(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ , e na sua forma fatorizada, sendo x1, x2 e x3 suas raízes reais, por  $P(x) = a \cdot (x - x1)(x - x2)(x - x3)$ , com  $a \neq 0$ .

Assim, usando a igualdade de polinómios temos que:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = a \cdot (x - x1)(x - x2)(x - x3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cdot (x^3 + (b/a) \cdot x^2 + (c/a) \cdot x + d/a) = a \cdot (x - x1)(x - x2)(x - x3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (b/a) \cdot x^2 + (c/a) \cdot x + d/a = x^3 - (x1+x2+x3) \cdot x^2 + (x1 \cdot x2 + x1 \cdot x3 + x2 \cdot x3) \cdot x - x1 \cdot x2 \cdot x3$$

E assim, pela igualdade de polinómios obtemos que:

$$x1 + x2 + x3 = -b/a \quad , \quad x1 \cdot x2 + x1 \cdot x3 + x2 \cdot x3 = c/a \quad e \quad x1 \cdot x2 \cdot x3 = -d/a \quad .$$

INDO MAIS ALÉM

Por curiosidade e como desafio extra, o professor poderá propor aos alunos a formulação da conjetura semelhante para um polinómio de 4º grau com 4 raízes reais. E de seguida a prova!

