Progressões Aritméticas *vs* Funções Polinomiais

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

Os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire CX para formular conjeturas em resultado de uma investigação envolvendo progressões aritméticas e funções polinomiais (em particular funções afins), mobilizando conhecimentos de 11º ano e revendo conceitos de anos anteriores. Deverão também validar as conjeturas, procedendo à sua prova.

Pretende-se ainda que, recorrendo à representação gráfica das funções assim definidas, observem algumas das caraterísticas dos gráficos, nomeadamente o declive e a ordenada na origem da reta e o ponto de interseção dos seus gráficos. Por isso, com esta atividade pretende-se:

- Rever os conhecimentos sobre funções polinomiais, em particular a função afim.
- Mobilizar os conhecimentos adquiridos sobre progressões aritméticas.
- Desenvolver competências ao nível de utilização da tecnologia gráfica, nomeadamente a representação e determinação de pontos notáveis.
- Desenvolver a capacidade de análise, de observação de regularidades e formulação de conjeturas.

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Folha de tarefas

TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

Para que os alunos, individualmente ou aos pares, possam explorar as questões de investigação de forma autónoma e livre, considera-se que poderá ser muito importante um primeiro momento em que o professor apresente o tipo de funções afins a trabalhar e solicite a vários alunos exemplos que cumpram as premissas do problema. Os alunos deverão ter noção das condições dos três parâmetros **a**, **b** e **c**.

De seguida apresentam-se alguns possíveis exemplos de respostas assim como alguns ecrãs do trabalho a realizar na página de Gráficos da tecnologia TI-Nspire CX II.

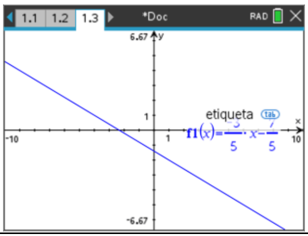
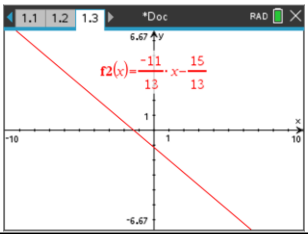
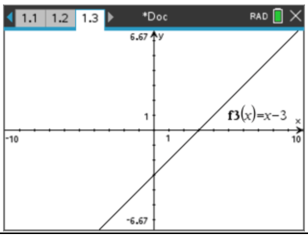
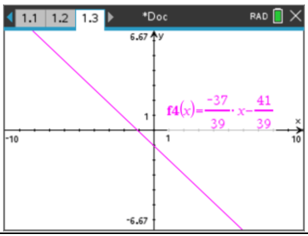
Progressões Aritméticas *vs* Funções Polinomiais

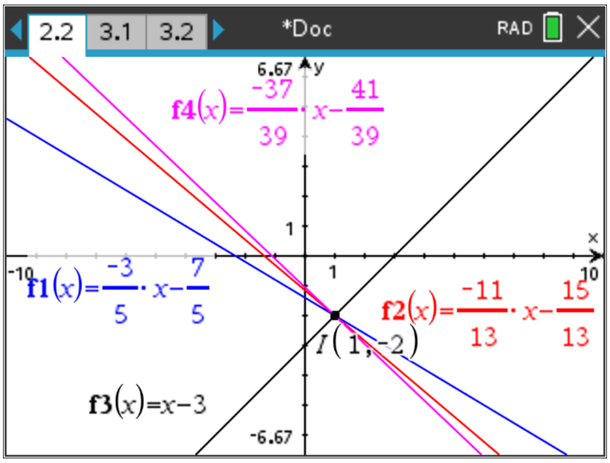
Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

QUESTÃO 1:

Prova que a sucessão (u_n), definida por $u_n=3-2n$, é uma progressão aritmética e indica a sua razão.

$u_{n+1} - u_n = 3-2(n+1) - (3-2n) = 3-2n-2-3+2n = -2$, portanto progressão aritmética com $r=-2$.

f1	f2	f3	f4
a=$u_3=-3$	**a**=$u_7=-11$	**a**=$u_1=1$	**a**=$u_{20}=-37$
b=$u_4=-5$	**b**=$u_8=-13$	**b**=$u_2=-1$	**b**=$u_{21}=-39$
c=$u_5=-7$	**c**=$u_9=-15$	**c**=$u_3=-3$	**c**=$u_{22}=-41$
$-3x-5y-7=0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y=-\frac{3}{5}x-\frac{7}{5}}$	$-11x-13y-15=0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y=-\frac{11}{13}x-\frac{15}{13}}$	$x-y-3=0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y=x-3}$	$-37x-39y-41=0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y=-\frac{37}{39}x-\frac{41}{39}}$
			



Os alunos poderão representar individualmente o gráfico de cada função, e perceber que caraterísticas têm esses gráficos, como por exemplo, nunca intersectam a origem do referencial, são sempre retas oblíquas, podem ter declive positivo ou declive negativo, assim coma a ordenada na origem.

Tornando ativas as representações gráficas das 4 funções, será possível que alguns alunos apontem o facto de se intersetarem todas num mesmo ponto. Com as ferramentas de interseção da aplicação Gráficos, os alunos deverão obter as coordenadas desse ponto.

Em conjunto, deverão formular corretamente e usando linguagem matemática uma conjetura, por exemplo:

> "*Os gráficos de todas as funções afins definidas por quaisquer 3 termos consecutivos de uma progressão aritmética (u_n), da forma $u_n\, x + u_{n+1}\, y + u_{n+2} = 0$, intersetam-se no ponto de coordenadas (1,2).*"

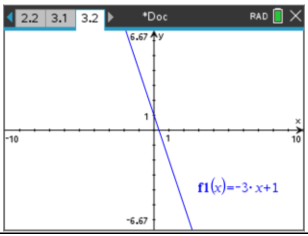
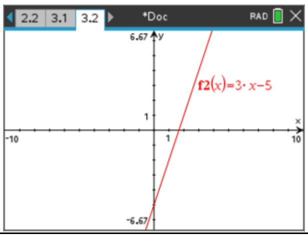
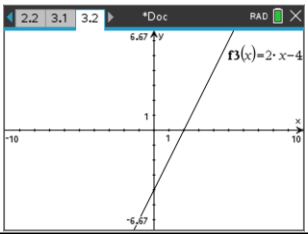
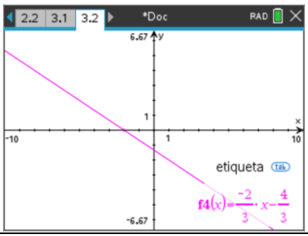
Progressões Aritméticas *vs* Funções Polinomiais

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

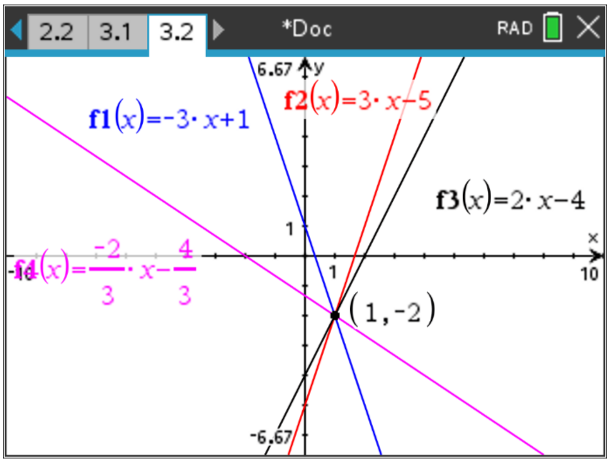
QUESTÃO 2:

Nesta questão os alunos terão maior liberdade na sua exploração, pelo que a riqueza da diversidade de exemplos testados pelos alunos deverá ser aproveitada pelo professor para reforçar a validade da conjetura, que mesmo ainda sem a prova aumenta o seu alcance.

De destacar aqui que os alunos terão de ter o cuidado de, ao indicarem a razão e um dos termos da progressão aritmética, os termos consecutivos selecionados serem distintos e não nulos. Abaixo colocam-se 4 possíveis exemplos para esta segunda questão.

(u_n)	(v_n)	(w_n)	(z_n)
r = 2 **f1** **a**= – 3 **b**= – 1 **c**= 1 $-3x-y+1=0 \Leftrightarrow$ $y=-3x+1$ 	**r = – 4** **f2** **a**= 3 **b**= –1 **c**= –5 $3x-y-5=0 \Leftrightarrow$ $y=3x-5$ 	**r = 3** **f3** **a**= – 2 **b**= 1 **c**= 4 $-2x+y+4=0 \Leftrightarrow$ $y=2x-4$ 	**r = 1** **f4** **a**= 2 **b**= 3 **c**= 4 $2x+3y+4=0 \Leftrightarrow$ $y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$ 

Representando em simultâneo os gráficos de quatro funções definidas à custa de quatro progressões aritméticas com razões distintas, o aluno observará que a sua conjetura se mantém, isto é, os gráficos das funções assim definidas intersectam-se num mesmo ponto, o ponto de coordenadas (1, – 2).



Assim, a conjetura é reforçada pelos vários exemplos construídos pelos alunos, faltando apenas a prova!

Progressões Aritméticas *vs* Funções Polinomiais

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

INDO MAIS ALÉM – Prova a tua conjetura!

Sugere-se que o processo analítico da prova seja numa primeira fase discutido com os alunos, dando-lhes a oportunidade de sugerirem caminhos e estratégias. Poder-se-á questionar os alunos sobre quantas funções, definidas de forma genérica, serão necessárias usar na prova e sobre como determinar analiticamente o ponto de interseção de gráficos de funções.

De seguida dever-se-á definir duas quaisquer funções afins, **f1** e **f2**, apenas através de um dos parâmetros, por exemplo **b1** e **b2**, e da respetiva razão **r1** e **r2** (r1≠0 e r2≠0).

Assim, a função **f1** ficará definida por:

(**b1–r1**)·x + **b1**·y + (**b1+r1**) = 0 ⇔ $\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{b1-r1}}{\mathbf{b1}}\mathbf{x} - \frac{\mathbf{b1+r1}}{\mathbf{b1}}$, pois **a1=b1–r1** e **c1=b1+r1**.

E a função **f2** ficará definida por:

(**b2–r2**)·x + **b2**·y + (**b2+r2**) = 0 ⇔ $\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{b2-r2}}{\mathbf{b2}}\mathbf{x} - \frac{\mathbf{b2+r2}}{\mathbf{b2}}$, pois **a2=b2–r2** e **c2=b2+r2**.

Analiticamente o ponto de interseção resulta de conjunção das duas equações, isto é, da resolução de um sistema de equações em ordem a x e y:

$$\begin{cases} y = -\frac{b1-r1}{b1}x - \frac{b1+r1}{b1} \\ y = -\frac{b2-r2}{b2}x - \frac{b2+r2}{b2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{4cm}} \\ -\frac{b1-r1}{b1}x - \frac{b1+r1}{b1} = -\frac{b2-r2}{b2}x - \frac{b2+r2}{b2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{4cm}} \\ -\frac{b1-r1}{b1}x + \frac{b2-r2}{b2}x = \frac{b1+r1}{b1} - \frac{b2+r2}{b2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{4cm}} \\ \frac{-\cancel{b1\times b2}+r1\times b2+\cancel{b2\times b1}-r2\times b1}{b1\times b2}x = \frac{\cancel{b1\times b2}+r1\times b2-\cancel{b2\times b1}-r2\times b1}{b1\times b2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{4cm}} \\ (r1\times b2 - r2\times b1)x = r1\times b2 - r2\times b1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow^{*} \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{b1-r1}{b1} - \frac{b1+r1}{b1} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-b1+r1-b1-r1}{b1} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-2b1}{b1} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

* de notar que $\mathbf{r1 \times b2 \neq r2 \times b1}$, pois caso contrário o sistema seria possível indeterminado, isto é, os gráficos das funções eram a mesma reta.

Nesta demonstração, poder-se-á dar a oportunidade aos alunos de determinarem analiticamente a interseção entre os gráficos de duas das funções que ele considerou anteriormente. Depois o professor poderá proceder à prova da conjetura.

INDO AINDA MAIS, MAIS ALÉM

Esta mesma investigação pode ser expandida a funções polinomiais definidas pelo seguinte tipo de equação:

a·x^n **+ b**·y **+ c = 0** , com **n** natural e **a**, **b**, **c** números reais distintos e diferentes de zero e termos consecutivos de uma progressão aritmética.