Função Derivada

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

Os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire para fazer conjeturas à volta de um problema envolvendo funções quadráticas e funções cúbicas, revendo conceitos de base (10º ano) e deverão também validar as conjeturas.

Pretende-se ainda que analisem, recorrendo à representação gráfica, a função derivada destas funções polinomiais e interpretem a sua evolução com base nas propriedades das funções polinomiais e da derivada. Por isso, com esta atividade pretende-se:

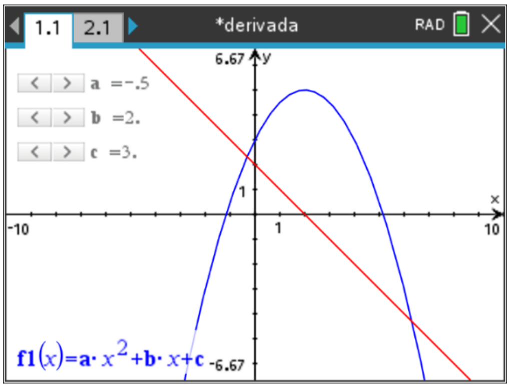
- Rever os conhecimentos sobre função quadrática e função cúbica.
- Compreender o significado geométrico da derivada.
- Interpretar a relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva função derivada.

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Ficheiro derivadas.tns
- Folha de tarefas

TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

Considerando a figura, onde está representada uma função quadrática da família $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, pretende-se estudar o efeito dos parâmetros destas funções nos respetivos gráficos, como revisão de conhecimentos relativos ao 10º ano. Numa segunda fase desta tarefa, pretende-se obter explicações sobre o gráfico da função quadrática à medida que os parâmetros se alteram, e desde logo uma explicação do tipo de gráfico da função derivada.

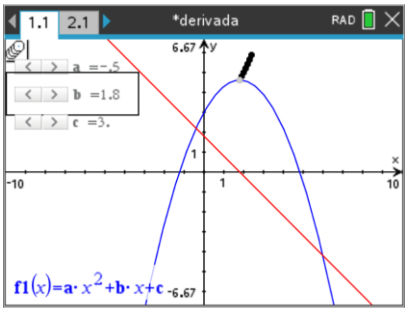
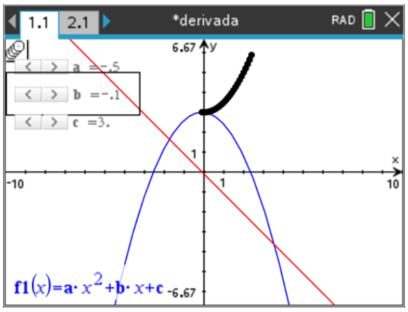
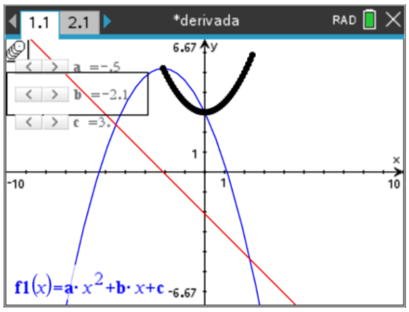


Note-se que o efeito provocado na parábola pela alteração dos parâmetros a e c são relativamente simples com recurso ao conhecimento das transformações geométricas.

Função Derivada

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

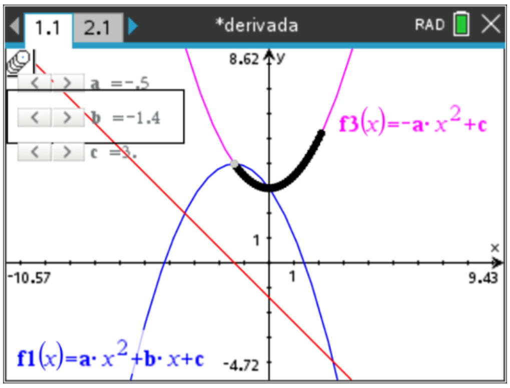
Já em relação ao efeito provocado pelo parâmetro b, tal não é tão evidente. No entanto, uma passagem por diversos valores de b, com utilização do seletor, vai criar a forte convicção de que o vértice da parábola descreve uma outra parábola, ou seja, que o lugar geométrico do vértice é uma parábola com a concavidade voltada para o lado oposto da parábola considerada.

Note-se que as coordenadas do vértice se podem escrever na forma $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Podemos daqui chegar à formulação equivalente $\left(-\frac{b}{2a}, -a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c\right)$.

Designando por x a abcissa do vértice e por y a respetiva ordenada, conclui-se que $y = -ax^2 + c$, ou seja, uma equação da parábola que é lugar geométrico dos vértices das consideradas ao variar o parâmetro b. Pode confirmar-se visualmente com a representação gráfica de $y = -ax^2 + c$.



Pode considerar-se uma interpretação desta variação relacionando com a alteração da velocidade inicial na equação do movimento de um corpo lançado e em que se considera um referencial associado à experiência.

O trabalho deverá prosseguir com o estudo da relação entre o gráfico da função derivada e o das funções quadráticas da família.

Função Derivada

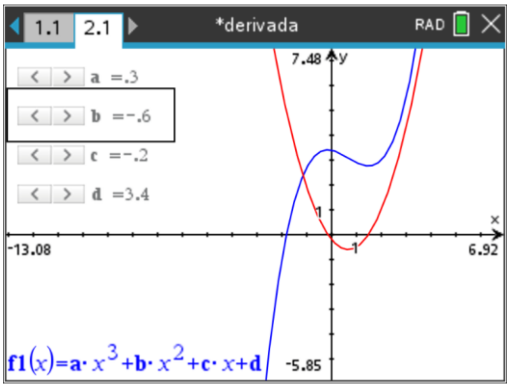
Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Ao aluno podem ser efetuadas diversas questões que o levem à necessidade de trabalhar matemática para lhes dar resposta, como por exemplo:

1. Parece que o gráfico da função derivada é uma reta. Será sempre? Porquê?
2. Ao variar o parâmetro c, a reta correspondente à função derivada não se altera, porque será?
3. Ao variar o parâmetro b, parece que as retas são todas paralelas. Será sempre assim? Porquê? (Ou pedir para fazer uma previsão do que vai suceder ao variar o coeficiente do termo linear)
4. E ao variar o parâmetro a? Aqui há uma variação dos declives da reta e parece que todas as retas têm um ponto comum. Que ponto é esse?

Para responder a estas questões é necessário suscitar estas conclusões e depois a prova.
Para dar resposta à primeira questão pode por exemplo considerar-se a regra de derivação de uma função quadrática, passando a derivada a ser dada, em função dos parâmetros, por $2ax + b$. Observando esta expressão geral, percebe-se que a alteração do parâmetro c não provoca efeito na reta (resposta à segunda questão), que a alteração de b provoca apenas alteração na ordenada na origem e não no declive (resposta à questão 3) e ainda se conclui que a alteração de a provoca alteração do declive e que b se mantém, concluindo-se que o ponto de coordenadas $(0, b)$ é o ponto comum a todas as retas (resposta à 4ª questão).
Pode ainda explorar-se a relação do sinal do declive da reta e a monotonia da função quadrática, tratando assim de um item deste conteúdo das derivadas.

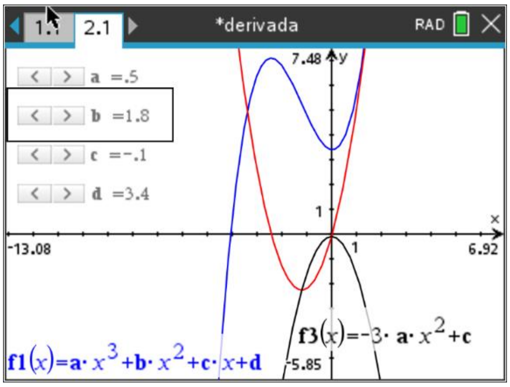
De seguida pode sugerir-se ao aluno uma exploração análoga no que à função derivada diz respeito, agora partindo da função cúbica definida pelo polinómio $ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$.



Neste caso, a família correspondente de funções derivadas é dada por $3ax^2 + 2bx + c$.

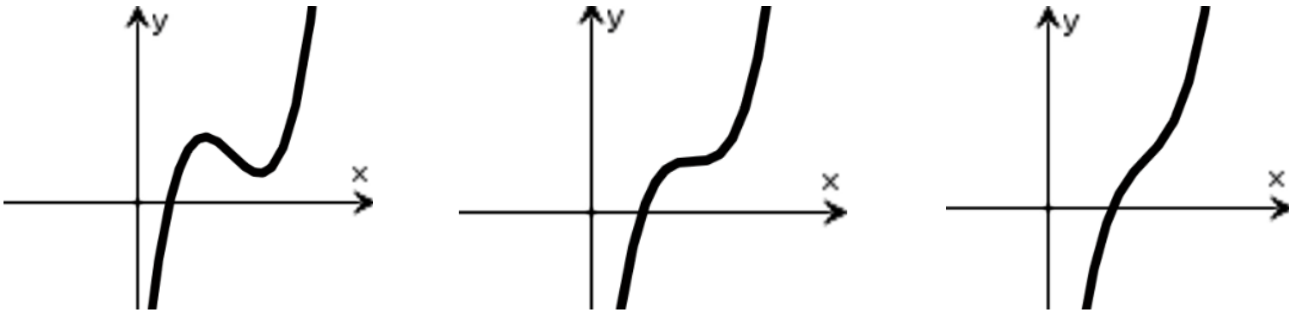
Função Derivada

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves



A análise dos parâmetros c e d encontra-se paralelo trivial na análise de b e c na parte da análise da função quadrática e relação para a sua função derivada. Tendo em consideração esse trabalho, será agora natural a interpretação da evolução do gráfico da função derivada ao variar o coeficiente do parâmetro quadrático da função cúbica. Pode constituir um exercício novo, de aplicação/consolidação da aprendizagem na parte final do trabalho anterior da tarefa, a obtenção da equação da parábola que é lugar geométrico do vértice, neste caso, de equação $y = -3ax^2 + c$.

A variação de a provoca alteração da concavidade da parábola e pode questionar-se adicionalmente, por exemplo, que que relação há entre o "tipo de curvas" do gráfico da função cúbica e o comportamento do gráfico da função quadrática, sua função derivada.
Entenda-se como tipo de curvas os seguintes três protótipos de gráficos de funções cúbicas.



Note-se que a resposta a esta extensão tem que ver com o número de interseções da parábola com o eixo das abcissas. Neste caso, é relevante uma comparação dos zeros da derivada com os o protótipo da função cúbica, já que pode ser considerada como diferença entre os três protótipos o número de pontos em que a reta tangente é horizontal, o que não significa que corresponda a extremos da função.