

Modelo Exponencial e Modelo Logístico

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

Os Modelos Populacionais é um dos temas da disciplina de MACS mais próximo dos temas de Matemática A, embora o seu tratamento seja substancialmente diferente. Em ambos a tecnologia tem um papel importante a desempenhar, libertar o cálculo e facilitar a representação gráfica para a análise dos modelos e ajuste dos mesmos a contextos/problemas reais.

Nesse sentido, nesta atividade pretende-se que os alunos, com recurso à tecnologia TI-Nspire CX II, explorem as várias formas de representação de dados, quer por meio de tabelas, por meio de representações gráficas e, ainda, através de expressões analíticas que traduzem modelos matemáticos conhecidos.

Em conclusão, com esta atividade pretende-se:

- ver, rever e consolidar as principais características dos modelos matemáticos, em particular do modelo exponencial e do modelo logístico.
- apresentar uma abordagem diferente, contextualizada e experimental, para a comparação de modelos populacionais.
- reforçar o conhecimento sobre a representação de dados, em particular, a interação entre os dados em listas, em nuvem de pontos e em gráfico de uma função.
- promover exploração da tecnologia e desenvolver competências como a análise crítica e reflexiva.

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Ficha do Aluno (uma por aluno)

Esta tarefa deve ser realizada, preferencialmente, em pares devendo cada par ter acesso a pelo menos uma unidade portátil (calculadora) TI-Nspire CX II ou ao respetivo software.

A tarefa pressupõe que os alunos já tenham conhecimento sobre os modelos populacionais, nomeadamente os modelos exponencial e logístico. Sugere-se que os alunos possam consultar o seu manual, quer para rever os modelos populacionais quer para consultarem instruções sobre procedimentos com a calculadora gráfica.



Modelo Exponencial e Modelo Logístico

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves



TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

Considera-se que o contexto dado a esta atividade, uma questão ambiental de repovoamento de uma espécie extinta numa ribeira, possa merecer uma pequena abordagem por parte do professor, podendo passar por alguma discussão sobre a que profissionais poderá interessar este problema. Será que é apenas um tema para ambientalistas e cientistas? E os advogados, os jornalistas, ...? Sugere-se que os alunos exerçam a sua autonomia durante o trabalho, podendo o professor gerar momentos de discussão de grande grupo sempre que surjam dúvidas comuns e/ou observações pertinentes por parte dos alunos.

De seguida apresenta-se, questão a questão, uma proposta de resposta e algumas indicações que poderão ser úteis para o professor durante a sua ajuda aos alunos.

QUESTÃO 1 |

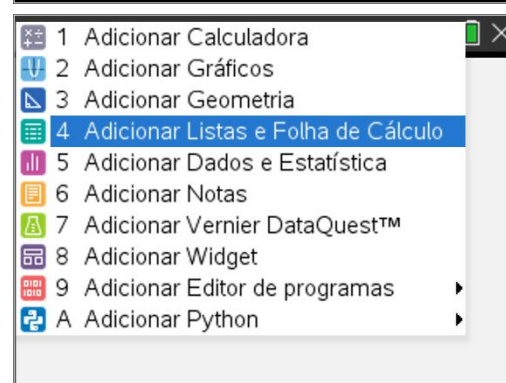
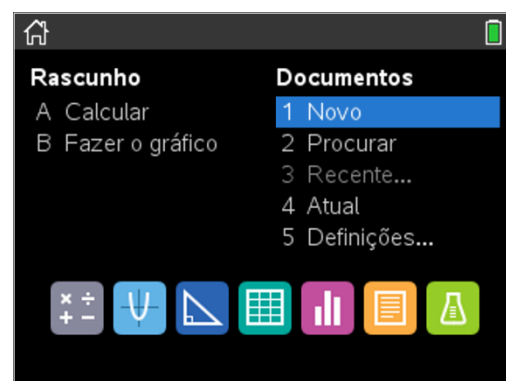
Nesta atividade o aluno, em termos da tecnologia TI-Nspire CX II, partirá de um novo documento.

Para isso, na sua unidade portátil (calculadora) deverá clicar na tecla  e pressionar a tecla  para a opção **1: Novo**.

De seguida, deverá selecionar a opção **4: Adicionar Listas e Folha de Cálculo**.

Na página de listas e folha de cálculo, e conforme sugestão dada na ficha do aluno, deverá começar por designar as colunas A e B por, respetivamente, **tempo** e **peixes**.

É indispensável que tal seja feito, pois só assim será possível fazer a representação gráfica dos dados. Desta forma estamos a associar os dados da tabela a listas/variáveis.



	A tempo	B peixes	C	D
=				
11	10	260		
12	11	285		
13	12	314		
14				
15				

Modelo Exponencial e Modelo Logístico

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Para representar os dados através de uma nuvem de pontos, gráfico de dispersão, os alunos podem recorrer a duas das aplicações da TI-Nspire CX II, a aplicação **Dados e Estatística** ou a aplicação **Gráficos**.

Para inserir uma nova página clicar sucessivamente nas teclas **ctrl** e **doc**, e seleccionar a opção **5: Adicionar Dados e Estatística**.

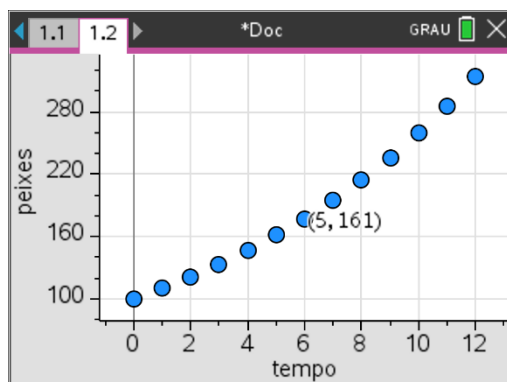
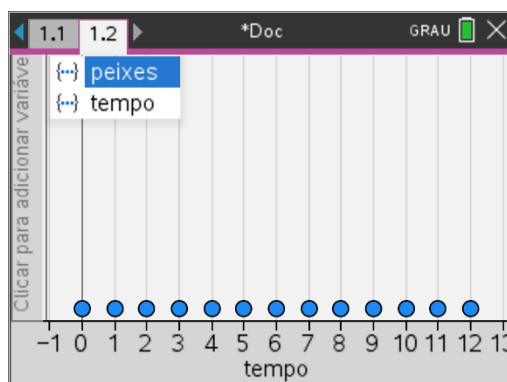
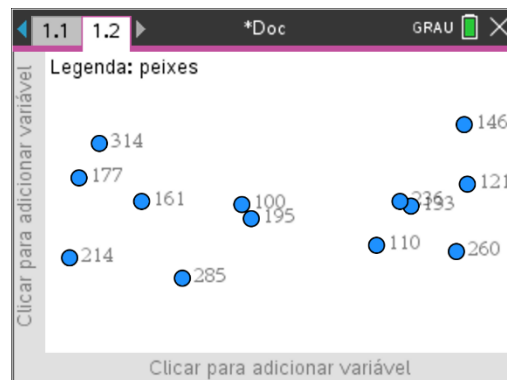
Surgirá uma página com a representação gráfica de pontos referentes a uma das variáveis, mas sem qualquer sentido.

Para definir qual a representar pode-se clicar na tecla **tab** ou deslocar o cursor até ao fundo da página e clicar sobre a caixa de texto **Clicar para adicionar variável**. Surgirá a lista de variáveis definidas no documento, devendo ser seleccionada a pretendida, neste caso a variável independente **tempo**.

Para seleccionar a variável dependente, proceder de forma análoga, mas agora no lado esquerdo da página, clicando sobre a caixa com o texto **Clicar para adicionar variável**. Seleccionar de seguida a variável **peixes**.

De imediato surgirá o diagrama de dispersão relativo aos dados registados pelos cientistas na primeira fase de monitorização.

De notar que deslocando o cursor sobre os pontos surge os valores relativos às variáveis em estudo.



Modelo Exponencial e Modelo Logístico

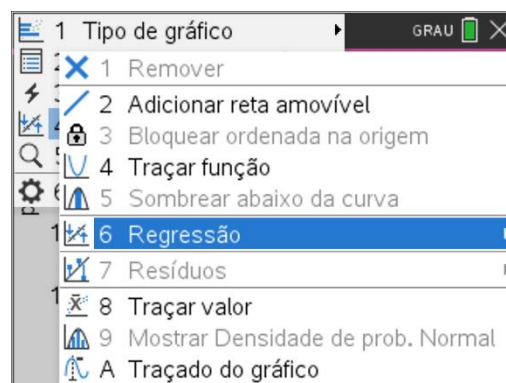
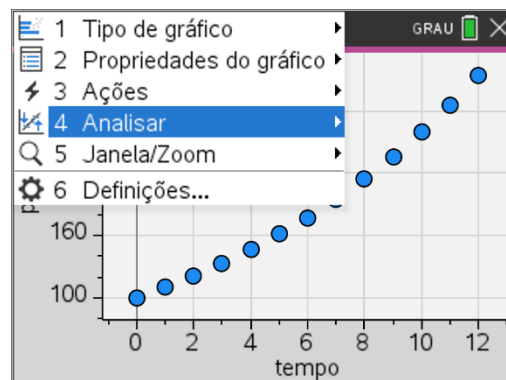
Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

QUESTÃO 2 |

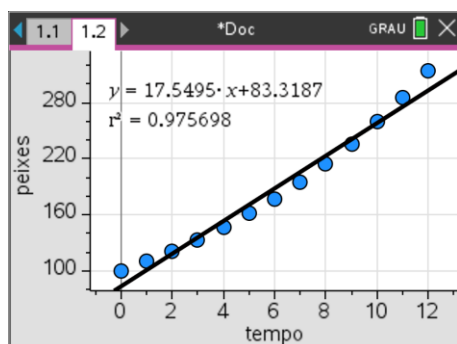
Na questão 2 o aluno deverá observar a representação gráfica obtida, se necessário proceder a ajustes na janela de visualização, e procurar modelos matemáticos que se ajustem à nuvem de pontos.

Para isso, seleciona na opção **4: Analisar** do menu, tecla **[menu]**, da aplicação a opção **6: Regressão**.

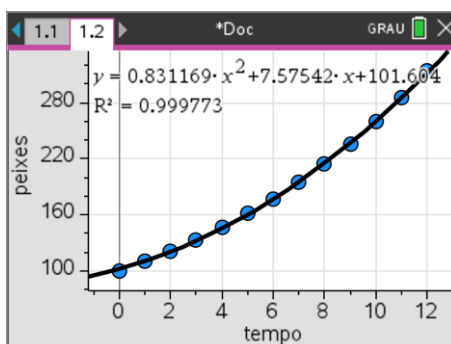
Será expectável que os alunos considerem duas possibilidades de regressões para ajuste à nuvem de pontos, a regressão quadrática, principalmente se se recordarem do estudo da função quadrática do 3º ciclo, e a regressão exponencial. Podendo, e talvez devendo, experimentar outras regressões para se aperceber da não adequação desses modelos aos dados do problema.



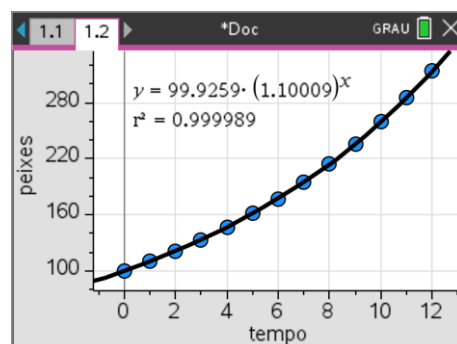
Abaixo apresentam-se algumas dessas regressões.



Regressão Linear ($y = m \cdot x + b$)



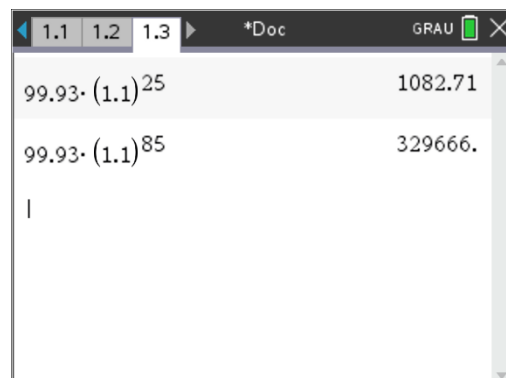
Regressão Quadrática ($y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$)



Regressão Exponencial ($y = a \cdot b^x$)

Considerando o modelo exponencial $y = 99,93 \cdot 1,1^x$, e numa página de calculadora, os alunos deverão determinar uma previsão, segundo este modelo, para o número de peixes 2 anos depois, isto é para $x=25$, e para 7 anos após, $x= 85$.

A previsão para 7 anos depois deverá despertar alguma reação dos alunos, por ser um valor muito elevado.



Modelo Exponencial e Modelo Logístico

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

QUESTÃO 3 |

Para inserir os novos dados da segunda fase de monitorização, os alunos deverão usar outras duas colunas da mesma folha de cálculo.

Assim, designam por **tempo1** e **peixes1** as duas novas variáveis/listas onde irão inserir todos os dados recolhidos.

De destacar a importância de não usar as listas anteriores, acrescentando apenas os valores em falta, pois dessa forma perder-se-ia gráfica e análise da regressão realizada com os primeiros dados.

Os dados já existentes podem ser copiados ou transcritos para as duas novas listas. A forma mais rápida de os copiar será escrever o nome da lista na 2ª célula a cinzento, pressionar **enter** e depois apagar essa mesma célula a cinzento (apenas apagará a ligação e não os dados).

Por fim, inserir manualmente os novos dados do problema completando as listas **tempo1** e **peixes1**.

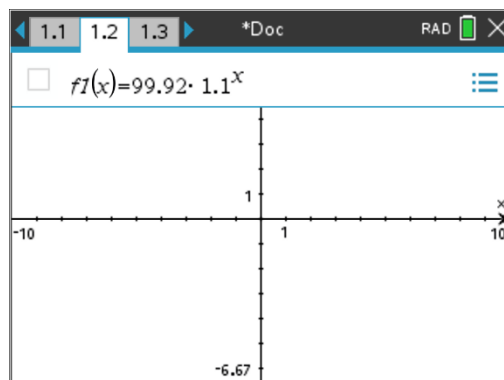
De seguida adicionar uma página de **Gráficos**, teclas **ctrl** e **doc**, e no editor de funções, que surgirá aberto (tecla **tab** para abrir se necessário), inserir a expressão designatória do modelo adotado na questão 2, $y = 99,93 \cdot 1,1^x$.

Clicar tecla **enter** para obter a representação gráfica na janela de visualização standard $[-10;10] \times [-6,67;6,67]$, que não é a ajustada ao conjunto de dados.

	A tempo	B peixes	C tempo1	D
1	0	100		
2	1	110		
3	2	121		
4	3	133		
5	4	146		

	A tempo	B peixes	C tempo1	D peixes1	E
1	0	100	0	100	
2	1	110	1	110	
3	2	121	2	121	
4	3	133	3	133	
5	4	146	4	146	

	A tempo	B peixes	C tempo1	D peixes1	E
18			28	557	
19			29	564	
20			35	592	
21			41	605	
22			47	611	



Modelo Exponencial e Modelo Logístico

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

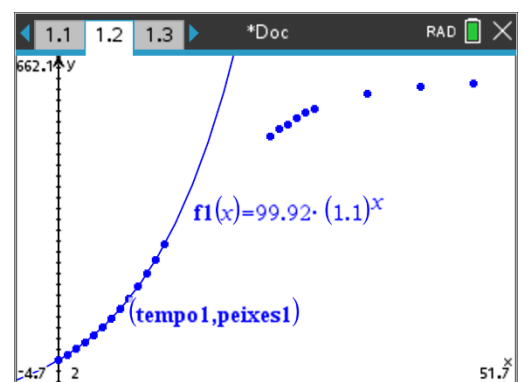
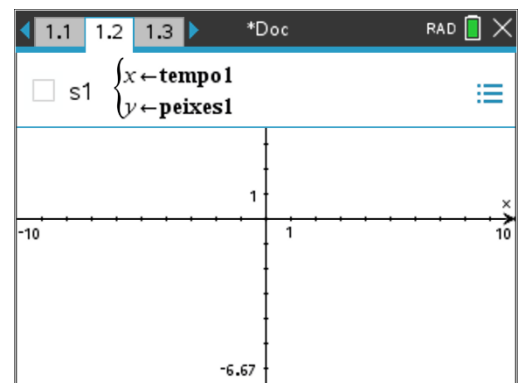
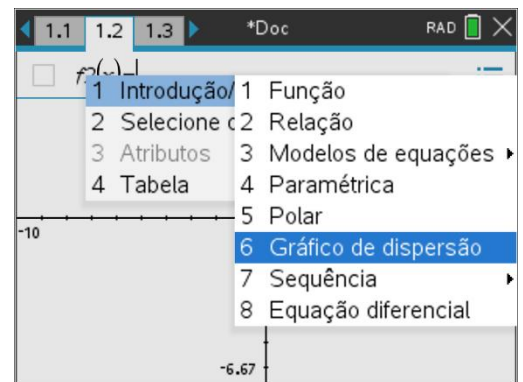
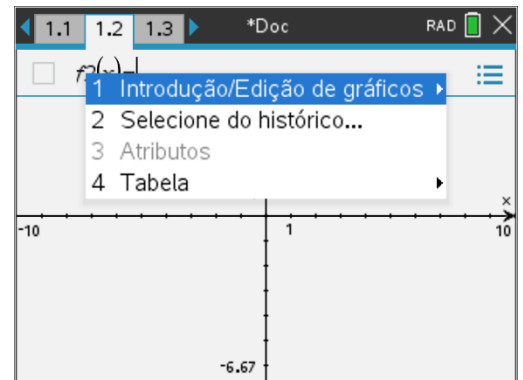
De seguida, clicar tecla **tab** (ou 2 cliques **↵** numa zona em branco) para abrir linha de edição e alterar o tipo de representação pretendida, isto é, alterar de representação de funções reais de variável real para diagrama de dispersão.

A alteração do tipo de representação gráfica poderá ser feita usando o menu da aplicação, tecla **menu**, ou usando o menu de contexto, teclas **ctrl** e **menu**, selecionando de seguida a opção **1: Introdução/edição de gráficos** e depois a opção **6: Gráfico de dispersão**.

De seguida indicar as variáveis x , variável independente, e y , variável dependente, das quais se pretende representar o diagrama de dispersão. Neste caso x será a variável **tempo1** e y a variável **peixes1**. O nome das variáveis poderá ser inserido manualmente ou então selecionado das variáveis existentes clicando na tecla **var**. Clicar na tecla **enter** para obter a representação gráfica.

Tendo em atenção a janela de visualização standard não surgirá nenhuma representação gráfica. Será necessário alterar a janela de visualização sendo neste caso, porque envolve a representação de dados, mais indicado usar a opção **9: Zoom Dados** da configuração da janela do menu da aplicação.

Por observação das duas representações gráficas, modelo exponencial e gráfico de dispersão, será possível concluir que o modelo não se ajusta ao conjunto de todos os dados.



Modelo Exponencial e Modelo Logístico

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

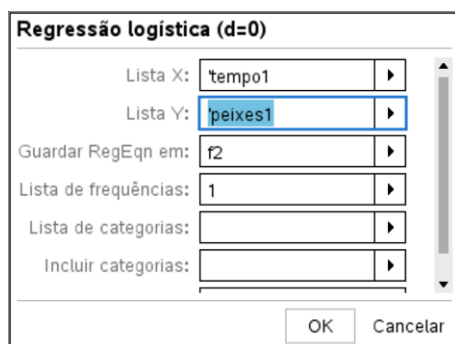
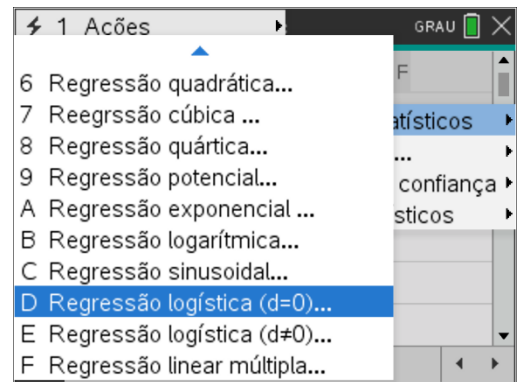
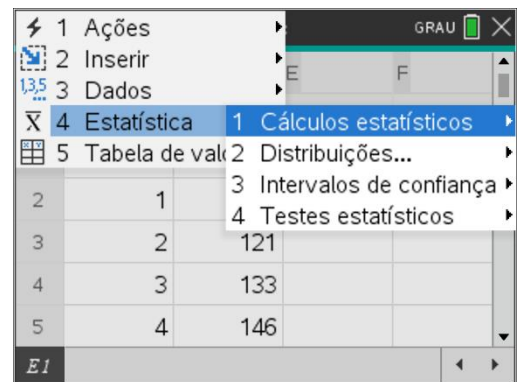
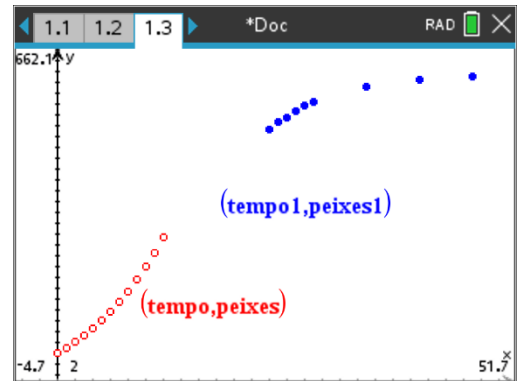
QUESTÃO 4 |

Na descrição do crescimento da população de peixes pretende-se que os alunos identifiquem 3 momentos distintos dessa evolução:

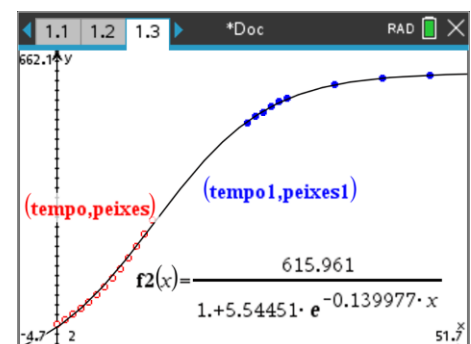
- uma fase inicial, correspondente aos primeiros dados, de um crescimento rápido que poderá corresponder no contexto do problema às melhores condições de reprodução e alimentação por parte dos peixes;
- uma fase intermédia, entre o 1º e o 2º ano, em que esse crescimento passou a ser menor de mês para mês;
- uma fase final, a partir do 2º ano, em que esse crescimento foi se anulando, isto é, o crescimento seria quase nulo.

Esta análise realizada pelos alunos deverá permitir perceberem que o modelo que devem selecionar para obter uma nova regressão deverá ser o modelo logístico.

Para tal, na página da Listas e Folha de Cálculo onde se encontram os dados, os alunos deverão clicar na tecla menu, selecionar a opção **4: Estatística**, seguida da opção **1: Cálculos estatísticos** e por fim selecionar a regressão pretendida, a opção **D: Regressão logística (d=0)**.



C	tempo1	D	peixes1	E	F
=					=Logistic('terr
1	0	100	Título...	Regressão ...	
2	1	110	RegE...	$c/(1+a \cdot e^{(-b \cdot x)})$	
3	2	121	a	5.54451	
4	3	133	b	0.139977	
5	4	146	c	615.961	
F2	="c/(1+a \cdot e^{(-b \cdot x)})"				



Configuração da regressão logística

A regressão na folha de cálculo

O gráfico do modelo logístico

Modelo Exponencial e Modelo Logístico

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

QUESTÃO 5 |

Estando o modelo logístico obtido guardado no editor de funções como f_2 , então para obter o número de peixes após 7 anos, por este modelo, bastará inserir na página de **Calculadora** a expressão $f_2(85)$.

O valor obtido, aproximadamente 616 peixes, é muito inferior ao obtido pelo modelo exponencial.

Expression	Result
$99.93 \cdot (1.1)^{25}$	1082.71
$99.93 \cdot (1.1)^{85}$	329666.
$f_2(85)$	615.937
$f_2(25)$	527.577

Os dois modelos usados, modelo exponencial e modelo logístico, têm uma semelhança que se traduz pelo facto de o modelo logístico ter uma primeira fase com um crescimento rápido, e, portanto, análogo ao crescimento exponencial.

A população de peixes sustentável para a ribeira será de 616 peixes, pois corresponde ao valor que se obtém a partir deste modelo para passados muitos meses. Esse valor corresponde ao valor do parâmetro c do modelo.

Expression	Result
$99.93 \cdot (1.1)^{85}$	329666.
$f_2(85)$	615.937
$f_2(25)$	527.577
$f_2(1000)$	615.961
$f_2(10000)$	615.961