

Teoria Frequentista - simulações

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

SITUAÇÃO PROBLEMA | O dia de Aniversário

Um problema clássico do estudo de probabilidades é “O dia de Aniversário” que consiste em estudar qual a probabilidade de num conjunto de n pessoas pelo menos duas festejarem o seu aniversário no mesmo dia, independentemente da sua idade.


Que te parece?! Serás capaz de fazer uma previsão? Regista então a tua previsão para duas situações, uma primeira que iremos estudar, quando o número de pessoas é 10, uma segunda que fica como desafio, quando as pessoas são os alunos da tua turma.

Consideremos então, a partir de agora uma situação de um grupo de 10 pessoas, por exemplo os jogadores efetivos de um jogo do hóquei em patins. Qual será então a probabilidade num jogo de hóquei patins pelo menos dois dos jogadores festejarem o aniversário no mesmo dia? Será baixa, elevada, ou próxima dos 50%?

QUESTÃO 1 | Uma simulação apenas ...

A simulação computacional de experiências aleatórias permite-nos estudar as probabilidades dos acontecimentos dessas experiências, desde que elas sejam “equivalentes” em termos probabilísticos.

Como devemos então proceder com esta experiência aleatória dos aniversários de 10 jogadores de hóquei em patins?!

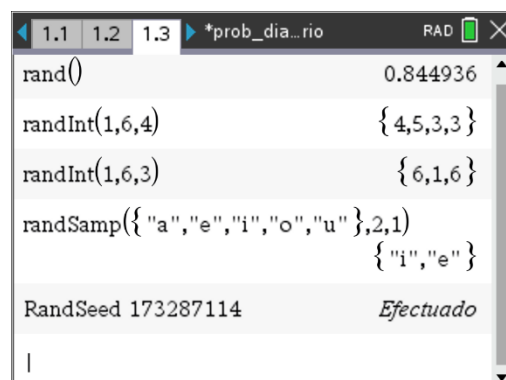
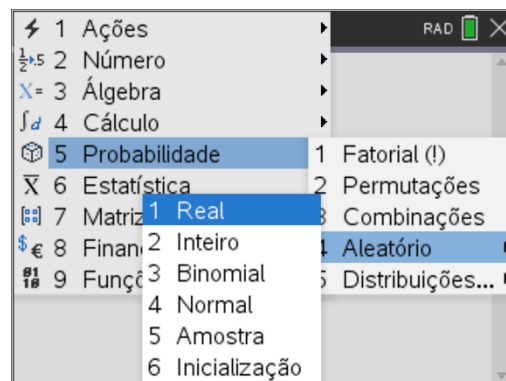
Primeiro precisas de saber que a TI-Nspire CX II tem um menu com ferramentas que geram dados pseudo-aleatórios,  → **5: Probabilidades** → **4: Aleatório**, entre as quais:

1: Real - **rand()** - gera aleatoriamente um número real entre 0 e 1

2: Inteiro - **randInt(n, m, p)** - gera aleatoriamente uma lista de p números inteiros entre n e m

5: Amostra - **randSamp(lista,p,i)** - gera aleatoriamente uma lista de p elementos da lista com ou sem repetição ($i=0$ ou $i=1$)

6: Inicialização - **randseed numeroqualquer** - reinicializa com o *numeroqualquer* o algoritmo de gerar aleatórios.



Teoria Frequentista - simulações

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Vamos então simular os dias de aniversário dos 10 jogadores! Ora o dia de aniversário é um número inteiro que varia entre 1 e 365, portanto iremos usar a função **randInt**.

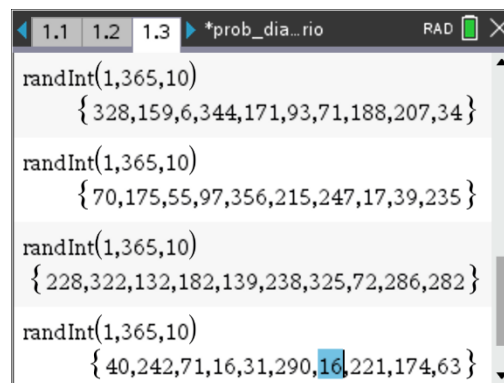
Assim, a instrução que devemos inserir é:

$$\text{randInt}(1,365,10)$$

Analisa o resultado que obtiveste e compara-o com o dos teus colegas.

Na tua simulação há jogadores a festejarem o aniversário no mesmo dia? Se sim, quantos?

Clica **enter** para obteres mais simulações e vê quantas simulações foram necessárias até obteres a primeira situação em que pelo menos dois jogadores festejam o seu aniversário no mesmo dia.



QUESTÃO 2 | Simulação com ordenação e verificação automática ...

Nas simulações acima não era imediato observar se havia aniversários comuns entre os jogadores, pois os dados gerados não se encontram ordenados.

Vejamos agora como usar a tecnologia TI-Nspire CX para nos facilitar essa análise.

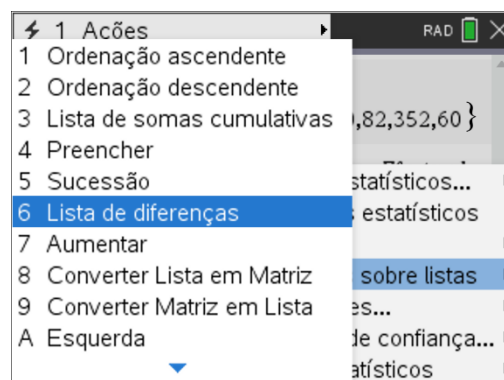
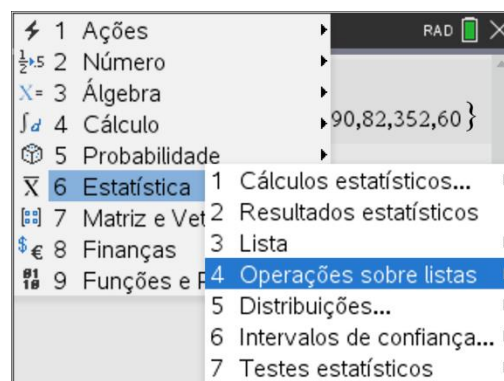
O que teremos que fazer à lista de dados:

- colocar a lista por ordem crescente ou decrescente

menu → **6: Estatística** → **4: Operações sobre listas** → **1: Ordenação ascendente**

- verificar se dois dados consecutivos são iguais, isto é, se a diferença entre dois dados consecutivos é zero;

menu → **6: Estatística** → **4: Operações sobre listas** → **6: Lista de diferenças**



Teoria Frequentista - simulações


Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

- verificar se existe algum zero na lista das diferenças

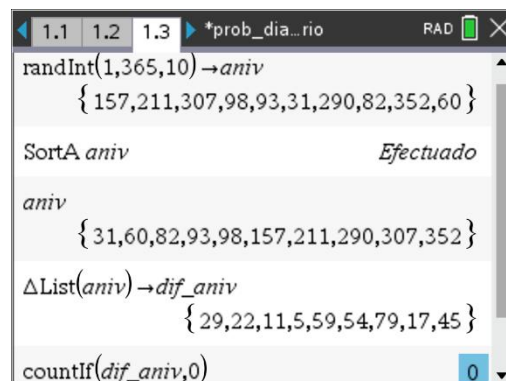
CountIf(lista, condição)

Nota que esta sequência de instruções obriga a ir guardando as listas em variáveis e usar depois essas variáveis nas instruções seguintes. Este é um processo computacional, mas mesmo assim é ainda demorado dado a necessidade de ir inserindo as instruções.

Vejamos com efetuar todas estas instruções de uma vez só numa composição de instruções que, embora pareça complexa, nos facilitará as simulações.

Para isso será necessário recorrer às Bibliotecas da tua calculadora, clicando na tecla , e no último separador selecionar a biblioteca **numtheory** e a função **sort_asc()**.

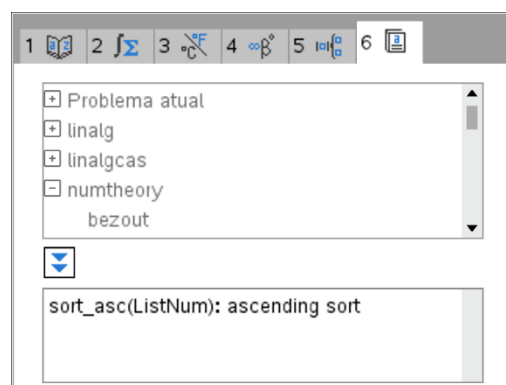
Com esta função e as usadas na Tarefa 1 insere a seguinte instrução na página de calculadora:



```

1.1 1.2 1.3 *prob_dia...rio RAD
randInt(1,365,10) -> aniv
{ 157,211,307,98,93,31,290,82,352,60 }
SortA aniv Efectuado
aniv
{ 31,60,82,93,98,157,211,290,307,352 }
ΔList(aniv) -> dif_aniv
{ 29,22,11,5,59,54,79,17,45 }
countIf(dif_aniv,0) 0

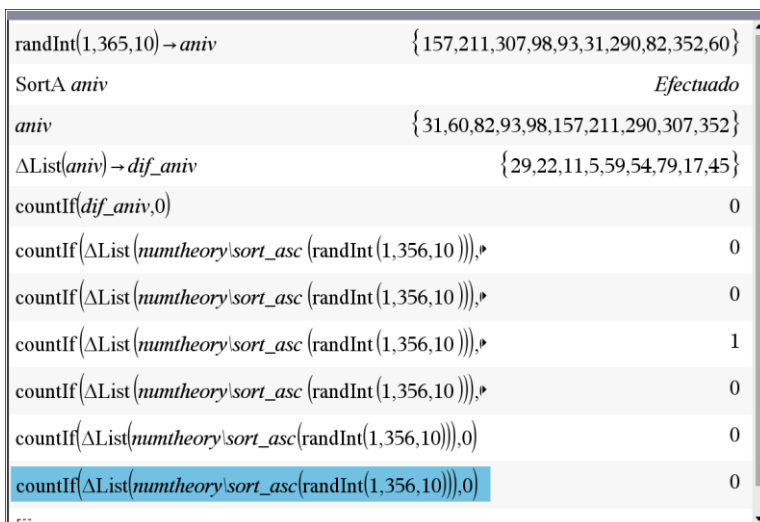
```



```

1 2 3 4 5 6
Problema atual
linalg
linalgcas
numtheory
  bezout
sort_asc(ListNum): ascending sort

```




```

randInt(1,365,10) -> aniv { 157,211,307,98,93,31,290,82,352,60 }
SortA aniv Efectuado
aniv { 31,60,82,93,98,157,211,290,307,352 }
ΔList(aniv) -> dif_aniv { 29,22,11,5,59,54,79,17,45 }
countIf(dif_aniv,0) 0
countIf(ΔList(numtheory\sort_asc(randInt(1,356,10))),) 0
countIf(ΔList(numtheory\sort_asc(randInt(1,356,10))),) 0
countIf(ΔList(numtheory\sort_asc(randInt(1,356,10))),) 1
countIf(ΔList(numtheory\sort_asc(randInt(1,356,10))),) 0
countIf(ΔList(numtheory\sort_asc(randInt(1,356,10))),0) 0
countIf(ΔList(numtheory\sort_asc(randInt(1,356,10))),0) 0

```

countIf(ΔList(numtheory\sort_asc(randInt(1,356,10))),0)

Executa cem vezes esta instrução, basta clicares na tecla , e verifica em quantas pelo menos duas pessoas fazem anos no mesmo dia! Esse valor é corrobora ou refuta a tua estimativa? Compara-o com os valores obtidos pelos teus colegas?

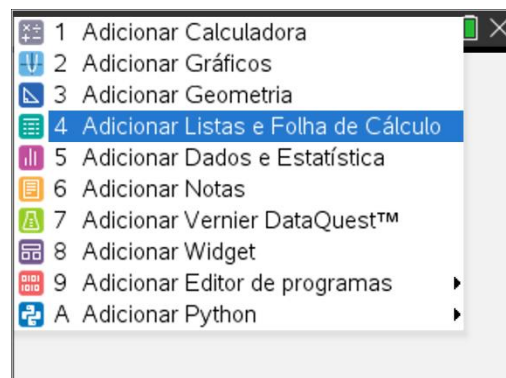
Teoria Frequencista - simulações

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

QUESTÃO 3 | As simulações numa folha de cálculo ...

Temos percorrido um caminho de melhoramento da eficácia da nossa simulação, e vamos continuar a fazê-lo, agora com recurso à aplicação de Listas e Folha de Cálculo.

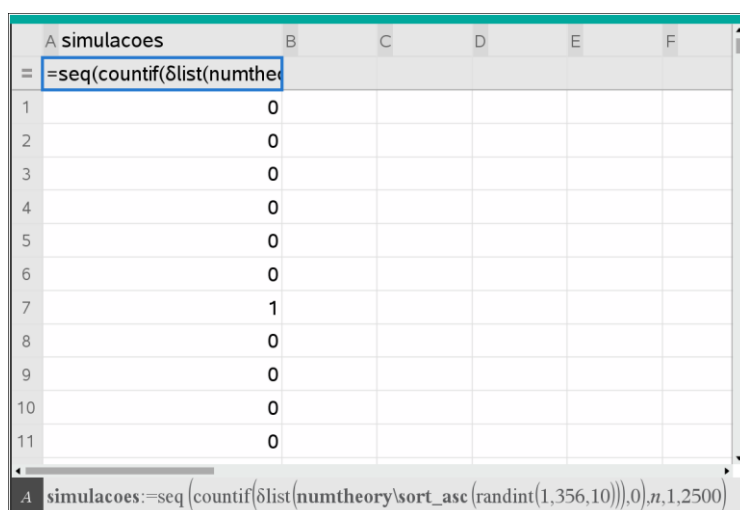
Adiciona ao teu documento tns uma nova página com a aplicação **Listas e Folha de Cálculo**, teclas `ctrl` e `doc`.



Nesta aplicação iremos realizar 2500, número máximo de linhas, simulações em simultâneo.

Para isso começa por designar a coluna **A** por **simulacoes**.

De seguida, na 2ª linha a cinzento insere a expressão que permitirá gerar uma sequência de 2500 simulações iguais às últimas realizadas na página de **Calculadora**.



A expressão a inserir deverá ser:

$$\text{seq}(\text{countif}(\text{deltaList}(\text{numtheory}\backslash\text{sort_asc}(\text{randInt}(1,356,10))),0),n,1,2500)$$

Finalmente, para contar o número de casos favoráveis ao nosso acontecimento “pelo menos duas pessoas fazerem anos no mesmo dia” bastará contar quantos elementos superiores a 0 tem a lista **simulacoes**:

- `countif(simulacoes,?>0)`

A frequência relativa do acontecimento, apesar de apenas serem 2500 simulações, dar-nos-á uma boa estimativa para o valor teórico da probabilidade. Compara-o com a tua estimativa.

O que terás que fazer com todas as frequências relativas obtidas na tua turma para teres um valor mais próximo do valor “teórico” da probabilidade?

