

Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

Nesta atividade os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire CX para formularem conjeturas sobre relações algébricas entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau. Deverão também validar as conjeturas com recurso à prova, a qual leva a um trabalho com operações algébricas. Por isso, com esta atividade pretende-se:

- Aplicar o conhecimento sobre equações de 2º grau, em particular a determinação das suas raízes.
- Aplicar corretamente termos associados às equações do 2º grau, como coeficientes, raízes, equação completa e incompleta.
- Resolver equações do 2º grau incompletas aplicando a lei do anulamento do produto e os casos notáveis.
- Desenvolver competências de decisão quanto à necessidade e importância do uso da tecnologia como facilitadora do cálculo, não substituindo o cálculo algébrico manual.
- Explorar as ferramentas de resolução de equações e de folha de cálculo da TI-Nspire CX II.

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Folha de tarefas
- Ficheiro invest_girard.tns

Esta atividade de investigação poderá ser aplicada em sala de aula com diferentes estratégias pedagógicas e diferentes níveis de aprofundamento, dependendo da dinâmica da turma, dos hábitos de trabalho ao nível da investigação matemática e, ainda, do nível de autonomia dos alunos.

Também as condições quanto ao número de equipamentos disponíveis poderão influenciar a metodologia a adoptar, no entanto realça-se aqui que o professor, ou a escola, poderá recorrer ao programa de empréstimo disponibilizado pela Texas Instruments (education.ti.com/pt).

Considera-se que, preferencialmente, esta atividade de investigação seja realizada em pares, admitindo-se que exista pelo menos uma unidade portátil (calculadora) ou software TI-Nspire CX II por cada par de alunos, e implementada em sala de aula, embora também possa ser proposta como atividade extra aula, após o término da resolução de equações de 2º grau.



Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

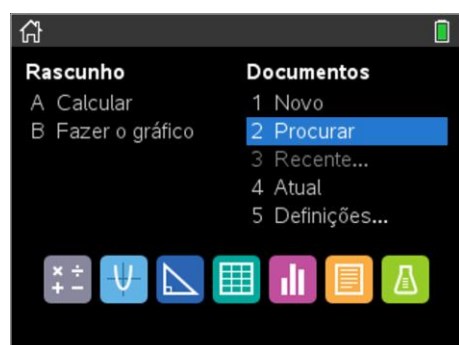
TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

Como tarefa prévia à atividade o professor poderá propor aos alunos uma pequena pesquisa na web sobre o matemático Albert Girard, realizada fora da sala de aula, e iniciar esta atividade convidando um aluno a apresentar, para toda a turma, este matemático francês.

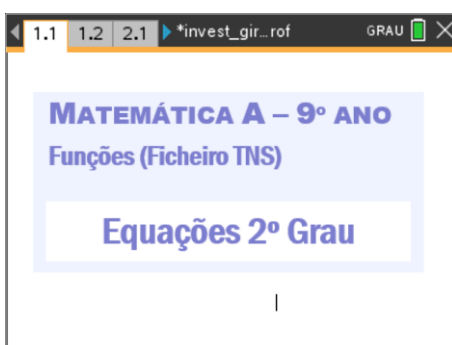
Iremos percorrer esta atividade, dividindo-a em Tarefas que os alunos terão que realizar, apresentando possíveis resoluções e sugestões metodológicas.

TAREFA 1 – Abrir e explorar o ficheiro invest_girard.tns

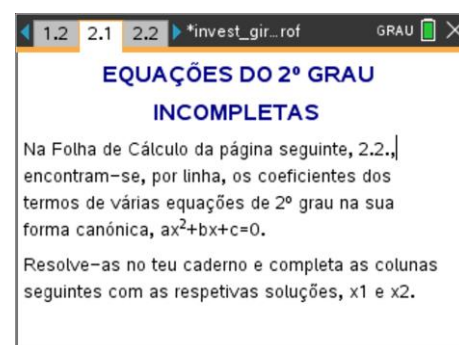
O primeiro desafio, mas também fator motivacional, para os alunos poderá ser abrir e explorar o ficheiro tns da TI-Nspire CX II. Como ajuda, colocam-se abaixo alguns ecrãs e instruções básicas.



- Tecla **⌘** e opção **2 Procurar**



- Abre na página 1.1 e usar os atalhos **⌘** + **→** (mover para a direita) e **⌘** + **←** (mover para a esquerda)

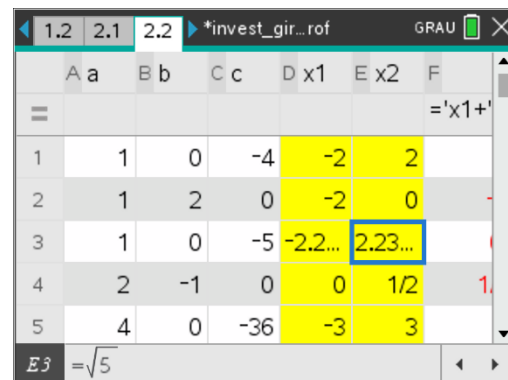


- Página 2.1 com instruções acerca da 1ª investigação. Usar o tapete do rato para deslocar o cursor.

As páginas 1.1, 1.2, 2.1 e 3.1, do documento tns, são páginas de Notas, isto é, o género de um simples editor de texto, mas no qual é possível integrar todas as ferramentas da TI-Nspire CX II.

As páginas 2.2 e 3.2 são folhas de cálculo, serão as páginas onde o aluno terá que inserir as raízes das equações e completar a tabela com várias fórmulas em função da sua investigação. Para inserir, nas células respetivas, as raízes das equações deverá usar as habituais teclas da calculadora.

Para inserir fórmulas/expressões adicionais, terá que deslocar o cursor para a 2ª linha com fundo cinza, linha para



	A a	B b	C c	D x1	E x2	F
=						= 'x1 +'
1	1	0	-4	-2	2	
2	1	2	0	-2	0	
3	1	0	-5	-2.2...	2.23...	
4	2	-1	0	0	1/2	1.
5	4	0	-36	-3	3	
E3	$=\sqrt{5}$					

Equações do 2º Grau

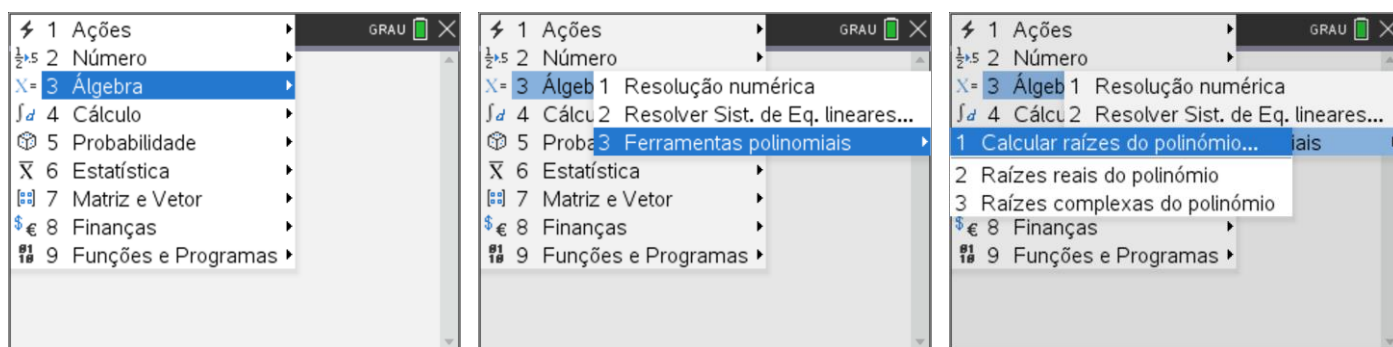
Eduardo Cunha
 Raul Aparício Gonçalves

inserir expressões designatórias geradoras (termo geral da lista/coluna), e escrever a expressão tendo o cuidado de as referências ficarem associadas às variáveis pretendidas.

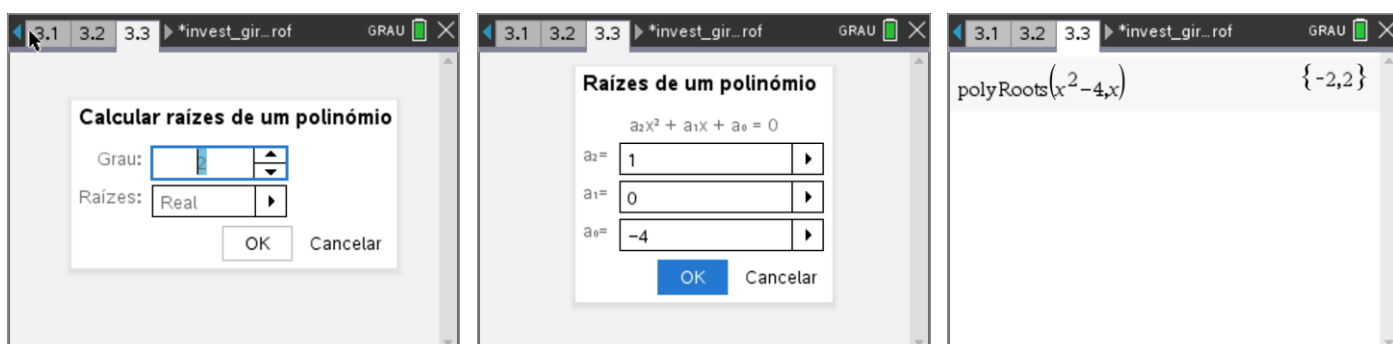
Note-se que na expressão geradora da coluna F, observável e editável na linha ao fundo do ecrã ($=x1+x2$), as variáveis surgem com uma plica antes, por exemplo 'x1, o que significa que está referenciada/associada a uma variável.

A página 3.3 do documento é uma página de Calculadora. Nesta página os alunos terão apenas que usar a ferramenta algébrica que permite determinar as raízes de uma equação polinomial, no caso do 2º grau. Esta ferramenta será usada com muita regularidade pelos alunos durante o Ensino Secundário, e esta poderá ser uma primeira abordagem a essa importante ferramenta.

Para obter as raízes da equação o aluno deverá clicar na tecla **[menu]**, selecionar a opção **3: Álgebra**, seguida da opção **3: Ferramentas polinomiais** e finalmente a opção **1: Calcular raízes do polinómio...**, conforme ecrãs abaixo. Esta sequência de instruções pode ser executada rapidamente clicando sucessivamente nas teclas **[menu]**, **[3]**, **[3]**, **[1]**.



De seguida surgirão janelas para o aluno indicar o grau da equação e os coeficientes dos seus termos, clicando no fim na tecla **[enter]** para obter as raízes.



Note-se que, se deve alertar os alunos que embora o resultado apresentado pela calculadora esteja

Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
 Raul Aparício Gonçalves

na forma habitual de conjunto (por ter chavetas), não é esse o significado neste ambiente computacional. Aqui trata-se de uma lista de valores, que podem ser repetidos, como por exemplo nas raízes duplas.

TAREFA 2 – 1ª Questão de Investigação

Nesta 1ª questão de investigação os alunos terão que traduzir cada linha da tabela constante na folha de cálculo da página 2.2 numa equação de 2º grau escrita na sua forma canónica. Embora simples, este é um processo que traduz uma consolidação e verificação de aprendizagens já realizadas.

As 8 equações de 2º grau e incompletas definidas na tabela dividem-se em dois tipos:

- $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$, sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$
- $a \cdot x^2 + c = 0$, sendo $a \cdot c < 0$

Os alunos deverão transcrever cada equação para o seu caderno diário e resolvê-las analiticamente, apresentando o seu conjunto solução.

De seguida, deverão inserir as soluções nas colunas D e E da folha de cálculo, conforme imagem ao lado.

Conforme sugestão de investigação, os alunos deverão usar as potencialidades da folha de cálculo para obter rapidamente, nas colunas seguintes, os valores da soma, da diferença, do produto e do quociente das raízes.

Para isso, deverão usar as funcionalidades de listas colocando, na 2ª linha a cinzento, a expressão designatória geradora de cada operação algébrica.

	Aa	Bb	Cc	D	E
1	1	0	-4		
2	1	2	0		
3	1	0	-5		
4	2	-1	0		
5	4	0	-36		
6	-3	5	0		
7	-0.5	0	24.5		
8	7	0	-28		

	Aa	Bb	Cc	Dx1	Ex2	F	G
1	1	0	-4	-2	2		
2	1	2	0	-2	0		
3	1	0	-5	-2.23607	2.23607		
4	2	-1	0	0	1/2		
5	4	0	-36	-3	3		
6	-3	5	0	0	5/3		
7	-0.5	0	24.5	-7	7		
8	7	0	-28	-2	2		

	Aa	Bb	Cc	Dx1	Ex2	F	G	H	I
1	1	0	-4	-2	2	$=x1+x2$	$=x1-x2$	$=x1*x2$	$=x1/x2$
2	1	2	0	-2	0	-2	-2	0	#UND...
3	1	0	-5	-2.23607	2.23607	0	-4.47214	-5	-1
4	2	-1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	0
5	4	0	-36	-3	3	0	-6	-9	-1
6	-3	5	0	0	5/3	5/3	-5/3	0	0
7	-0.5	0	24.5	-7	7	0	-14	-49	-1
8	7	0	-28	-2	2	0	-4	-4	-1

Este procedimento, poderá ser realizado, pelo menos para a soma, pelo professor através do software, projetando para toda a turma poder acompanhar e evitar erros, desmotivação e desorientação por eventuais dificuldades.

Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
 Raul Aparício Gonçalves

A procura por regularidades/relações entre números ou lista de números é um processo importante que envolve uma grande capacidade de análise de dados. Nesta investigação sugere-se que o professor vá dando algumas pistas, discutindo-as com os alunos, quer junto dos pares de trabalho ou até perante toda a turma. Deixamos de seguida algumas pistas, em forma de questão, que o professor poderá lançar:

- Quais as operações algébricas que gozam de propriedade comutativa? Será isso importante?
- Qual ou quais as operações algébricas que poderão não fazer sentido para alguns casos?
- Que colunas F, G, H e I têm mais elementos comuns com as colunas A, B e C?
- A coluna F tem que elementos comuns com a coluna B?
- Tendo em atenção que a coluna F e B têm em comum o número 0, que operações poderão estar subjacentes à possível relação?
- As colunas cujos seus dados “parecem” ter alguma relação têm o mesmo sinal?
- Será possível obter os dados da coluna F usando a coluna B e a coluna A ou a C? Como?
- A coluna H tem mais elementos comuns com que coluna?

	Aa	Bb	Cc	Dx1	Ex2	F	G	H	I	
=							=x1+x2	=x1-x2	=x1*x2	=x1/x2
1	1	0	-4	-2	2	0	-4	-4	-1	
2	1	2	0	-2	0	-2	-2	0	#UND...	
3	1	0	-5	-2.2...	2.23...	0.	-4.472...	-5.	-1.	
4	2	-1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	0	
5	4	0	-36	-3	3	0	-6	-9	-1	
6	-3	5	0	0	5/3	5/3	-5/3	0	0	
7	-0.5	0	24.5	-7	7	0	-14	-49	-1	
8	7	0	-28	-2	2	0	-4	-4	-1	
9										
10										

	x1	Ex2	F	G	H	I	J	K	L	
=							=x1+x2	=-b/(a)	=x1*x2	=c/a
1	-2	2	0	0	-4	-4	-4	-1		
2	-2	0	-2	-2	0	0	-2	#UND...		
3	2.2...	2.23...	0.	0	-5.	-5	-4.472...	-1.		
4	0	1/2	1/2	1/2	0	0	-1/2	0		
5	-3	3	0	0	-9	-9	-6	-1		
6	0	5/3	5/3	5/3	0	0	-5/3	0		
7	-7	7	0	0.	-49	-49.	-14	-1		
8	-2	2	0	0	-4	-4	-4	-1		
9										
10										

Este exercício de análise deverá permitir a formulação da conjectura pretendida, sendo que, para a verificarem, os alunos devem inserir novas colunas com as expressões designatória das relações obtidas.

A conjectura final, nesta parte da investigação, a ser formulada pelos alunos será:

“A soma das raízes de uma equação de 2º grau incompleta é igual ao simétrico do quociente entre o coeficiente do termo de 1º grau e coeficiente do termo de 2º grau. O produto das raízes de uma equação de 2º grau incompleta é igual ao quociente entre o termo independente e coeficiente do termo de 2º grau.”

Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
 Raul Aparício Gonçalves

TAREFA 3 – 2ª Questão de Investigação

Nesta 2ª questão de investigação, os alunos vão usar pela primeira vez uma ferramenta que lhes facilita o cálculo das raízes de uma equação do 2º grau, a ferramenta *polyRoots*.

Na ficha do aluno encontram-se, julgamos de forma clara, os passos que os alunos deverão seguir para usar esta ferramenta, que será muito importante para libertar os alunos do cálculo e os centrar na análise de dados e na construção de uma tabela que possa reforçar ou refutar a conjectura anteriormente formulada!

Nesta 2ª questão de investigação os alunos já terão maior facilidade no manuseamento da TI-Nspire CX II e, como algumas pequenas ajudas, deverão conseguir atingir o objetivo, a conjectura pode ser estendida às equações de 2º grau completas.

	A	B	C	D	x1	x2	F	G	H	I	J
=					$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$=x1+x2=x1+x2$	$=x1*x2=x1*x2$	$=-b/a$	$=c/a$	
1	1	2	1		-1	-1	-2	1	-2	1	
2	1	5	6		-3	-2	-5	6	-5	6	
3	2	-4	-6		-1	3	2	-3	2	-3	
4	1	-1	-6		-2	3	1	-6	1	-6	
5	3	12	-15		-5	1	-4	-5	-4	-5	
6	0.5	0.5	-1.8...		-2.5	1.5	-1	-3.75	-1	-3.75	
7	-1	0.5	10.5		3.5	-3	0.5	-10.5	0.5	-10.5	
8	-3	-12	231		7	-11	-4	-77	-4	-77	

De notar, na imagem acima, que outra forma de os alunos obterem as raízes das equações é inserir as expressões resultantes da fórmula resolvente para cada uma das raízes. Este poderá ser um passo a explorar pelo professor no final desta parte da atividade.

TAREFA 4 – A prova da conjectura

Esta prova envolvendo apenas conteúdos do 3º ciclo, e já trabalhados pelos alunos, poderá ser demasiado *densa* para os alunos, pelo que uma opção segura será o professor a fazer com a ajuda dos alunos ou então um aluno a fazer no quadro com a ajuda do professor e da turma.

Para uma turma mais ambiciosa, será aconselhável dar algum tempo para que os alunos possam tentar fazer a prova, sendo que é conveniente que o professor alerta para a nota constante na ficha do aluno. Vejamos a prova:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$