Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

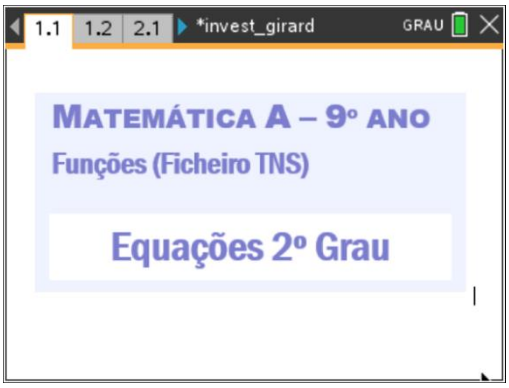
QUESTÕES PARA OS ALUNOS

A Resolução de Equações Polinomiais, como as do 1º e 2º grau que já aprendeste, são um conhecimento que te vai ser sempre exigido nos teus estudos futuros, quer em Matemática, quer noutras áreas do saber. O matemático francês Albert Girard (1595-1632), que também era músico e que foi forçado a refugiar-se na Holanda, produziu trabalho académico em álgebra, trigonometria e aritmética. Num desses trabalhos, Girard estudou a relação existente entre os coeficientes de uma equação polinomial de grau superior ou igual a 2 e as suas raízes.

Este é o DESAFIO que irás enfrentar! As tarefas seguintes conduzir-te-ão, através de um processo investigativo, à formulação de conjeturas e às suas provas!

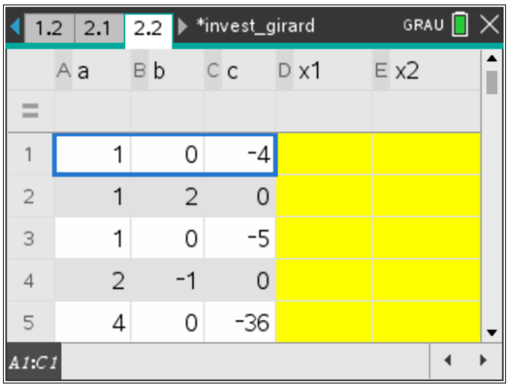
EQUAÇÕES DE 2ºGRAU

Considera, na sua forma canónica, uma equação do 2º grau, $a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = 0$, sendo a, b e c quaisquer números reais com $a \neq 0$.



Comecemos a nossa investigação por equações incompletas de 2ºgrau, estas são bem fáceis e rápidas de resolver, não concordas?!

Abre então o ficheiro **invest_girard.tns** na tua calculadora TI-Nspire CX II ou no software de aluno. Neste ficheiro tens várias instruções que deve ler com atenção, elas serão importantes para alcançares o sucesso da tua investigação. Para mudares de página na TI-Nspire CX II, usa as teclas ctrl + (direita) e ctrl + (esquerda).



Na Folha de Cálculo da página 2.2 deste ficheiro, imagem ao lado, encontram-se, por linha, os coeficientes de 8 equações incompletas de 2º grau.

Por exemplo, na linha 1 estão os coeficientes da seguinte equação de 2º grau $1{\cdot}x^2 + 0{\cdot}x + (-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$. Resolvendo a equação obtemos a raiz x1= – 2 e a raiz x2= 2, que devemos colocar nas respetivas colunas da linha 1. Resolve as equações e completa a tabela na TI-Nspire CX II.

Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

1ª QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO:

Observa atentamente a tabela da página 2.2 e tenta encontrar alguma relação algébrica (soma, diferença, produto, quociente) entre as raízes de uma dada equação e os respetivos coeficientes!

Por exemplo, para a equação da linha 1, $x^2 - 4 = 0$, temos:

Coeficientes: **a** = 1 , **b** = 0 , **c** = – 4 | Raízes: **x1** = – 2 , **x2** = 2

Operações algébricas com as raízes:

Soma = x1 + x2 = | Diferença = x1 – x2 = | Produto = x1 · x2 = | Quociente = x1 ÷ x2 =

Conjetura:

____

____

Usando uma estratégia análoga à anterior, continua a tua investigação com as restantes 7 equações incompletas e vai aprimorando a tua conjetura.

Conjetura Final:

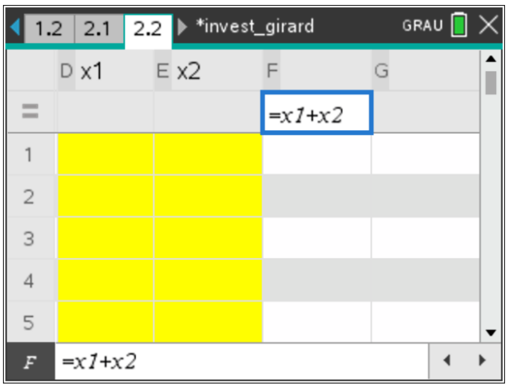
____

____

VERIFICANDO O ESTUDO EFETUADO

Com recurso à tecnologia TI-Nspire CX II, insere nas colunas F e seguintes, da Folha de Cálculo da página 2.2, as operações algébricas constantes na tua conjetura.

Para tal usa a linha a cinzento correspondente à expressão geradora da lista, escrevendo, por exemplo, **x1+x2** para obter a soma das raízes ou **–b/a** para obter o simétrico do quociente entre coeficientes. Atenta na imagem ao lado.



Nota que **x1** e **x2** são referentes a listas de valores, portanto variáveis, assim como **a**, **b** e **c**.

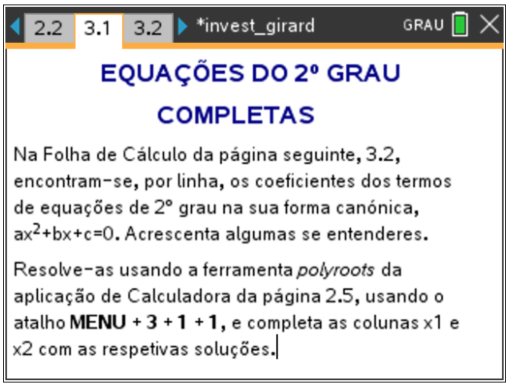
Verifica se os dados da folha de cálculo confirmam os teus cálculos e se suportam a tua conjetura.

Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

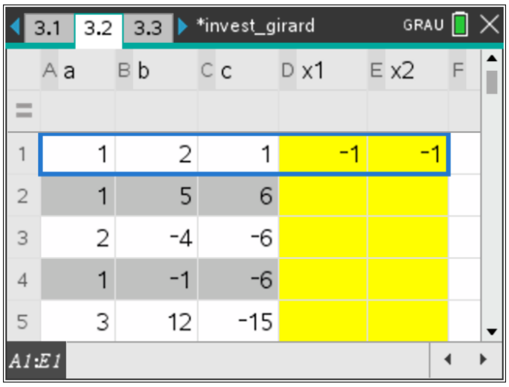
2ª QUESTÃO INVESTIGAÇÃO:

E nas equações de 2º grau completas, verificar-se-ão as mesmas relações?! Manterás a tua conjetura?!



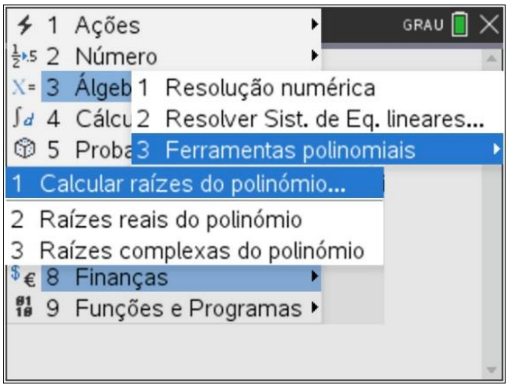
Como o objetivo desta investigação não é o conhecimento dos métodos de resolução de uma equação de 2º grau, que obviamente deverás saber, vamos usar uma ferramenta muito útil da calculadora TI-Nspire CX II que nos permite obter rapidamente as raízes reais das nossas equações.

Agora, no problema 3 da tua TI-Nspire CX II, e na página 3.1, encontram-se os coeficientes de algumas equações completas de 2º grau. Na linha 1, estão também já inseridas as raízes da respetiva equação, a saber: $x^2 + 2x + 1 = 0$. Atenta na imagem ao lado.

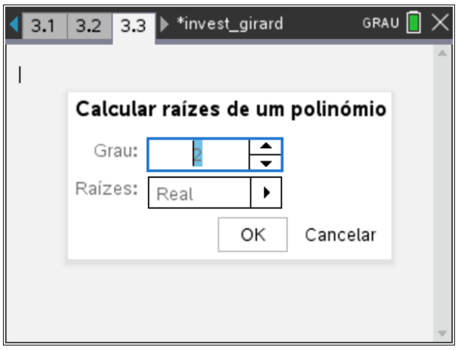


Vejamos, então, como se obter as soluções da equação usando a ferramenta *polyRoots* da TI-Nspire CX II.

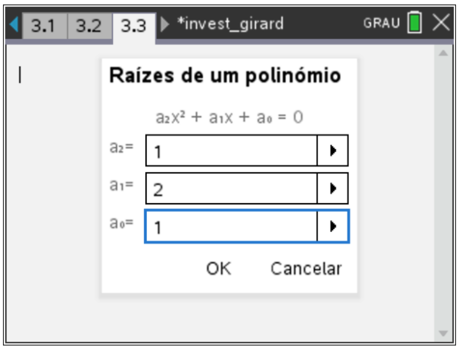
Na página 3.3, clica na tecla menu, e de seguida na seguinte sequência de opções: 3, depois 3, e finalmente 1. Esta sequência, menu 3 1 1, ser-te-á muito familiar no futuro.



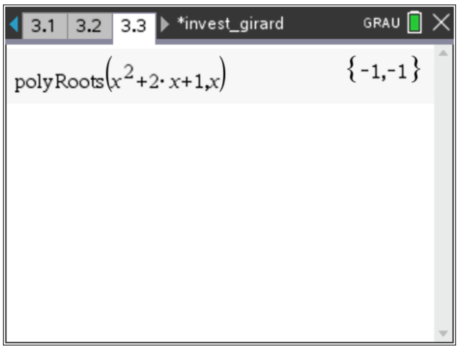
Abaixo encontras três ilustrações com os passos a seguir para usares esta importante ferramenta de cálculo.



- Indicar o grau da equação



- Indicar os coeficientes da equação



- Executar e obter as raízes

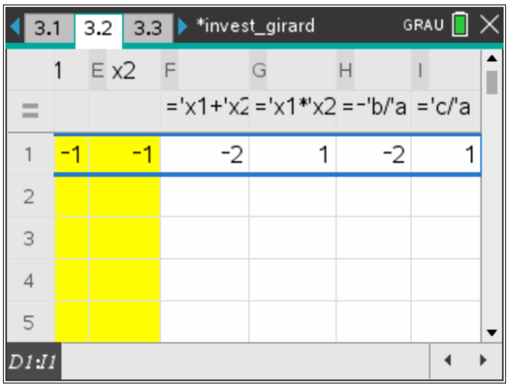
Usa, agora, a ferramenta *polyRoots* para determinares as raízes de cada uma das equações da folha de cálculo da página 3.2 e preenche as colunas x1 e x2 com os respetivos valores.

Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

Insere nas colunas F e seguintes, da mesma folha de cálculo, as operações algébricas constantes na tua conjetura.

Mais uma vez usa a linha a cinzento correspondente à expressão geradora da lista, escrevendo, por exemplo, **x1+x2** para obter a soma das raízes ou **–b/a** para obter o simétrico do quociente entre coeficientes.



Recorda que sempre que escreveres uma fórmula em que utilizes os coeficientes (variáveis definidas por ti por **a**, **b** e **c**) ou as raízes (variáveis **x1** e **x2**), terás que ter o cuidado de indicar que se trata de uma variável. Surgirá na fórmula, por exemplo, **‘x1** ou **‘a**.

Observa as imagens ao lado.

Com a tabela da página 3.2 completa, verifica se os dados reforçam a tua conjetura ou a refutam!

A PROVA DA TUA CONJETURA:

Considera, na sua forma canónica, uma equação do 2º grau, $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, sendo a, b e c quaisquer números reais com $a \neq 0$.

Como sabes, se existirem, as raízes de uma equação de 2º grau podem ser obtidas através da fórmula resolvente para equações de 2º grau, sendo:

$$x1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad .$$

Usando estas expressões para as raízes, obtém em função dos coeficientes a, b e c a soma, x1 + x2, e o produto, x1 · x2, das raízes da equação.

Nota: para facilitar a simplificação das expressões escreve cada uma das raízes como soma de duas frações e no produto das raízes utiliza um caso notável do produto de binómios.

Equações do 2º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

As equações do 3º grau possuem como lei de formação a equação algébrica: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$ e raízes x_1, x_2 e x_3. A decomposição dessa equação permite a determinação de expressões matemáticas capazes de relacionar as raízes da equação. Observe:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 – (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1*x_2 + x_1*x_3 + x_2*x_3) – x_1*x_2*x_3$

Dividindo a equação por ***a***, temos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Realizando a igualdade entre os polinômios:

$x_1 + x_2 + x_3 =$ ***– b/a***

$x_1 * x_2 + x_1 * x_3 + x_2 * x_3 =$ ***c/a***

$x_1 * x_2 * x_3 =$ ***– d/a***

Os polinômios do 4º grau possuem a seguinte lei de formação: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Nessa equação polinomial temos, no máximo, a existência de quatro possíveis raízes, as quais quando relacionadas, formam as seguintes expressões: