Complexos Conjugados

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

RESUMO E OBJETIVOS

Os alunos irão utilizar a tecnologia TI-Nspire para tirar conclusões sobre a relação geométrica entre os afixos de dois números complexos e dos respetivos conjugados, num polígono por eles definido, relativo ao tema dos números complexos, do 12º ano de escolaridade. Neste sentido será necessário mobilizar conhecimentos anteriores de diferentes temas de modo a validar conjeturas que se farão com muita vantagem com a manipulação de uma aplicação fornecida.

MATERIAIS E PREPARAÇÃO

- TI-Nspire CX ou CX II-T
- Ficheiro ramos complexos1.tns
- Folha de tarefas

TAREFAS E INVESTIGAÇÕES PARA OS ALUNOS

A resposta à **1ª questão** é relativamente simples, óbvia com a manipulação da aplicação caso não consiga o aluno obtê-la de imediato. Aliás, esta tarefa pode até ser trabalhada após o aluno ter aprendido que os afixos de um número complexo e do respetivo conjugado são simétricos relativmente ao eixo real do plano de Argand. É, no entanto, uma pergunta necessária e útil para enquadrar o trabalho seguinte.

Para tratar algebrcamente as respostas, considere-se $z_A = a + bi$ (afixo A) e $z_B = c + di$ (afixo B). Designem-se ainda os afixos de $\overline{z_A}$ por A’ e de $\overline{z_B}$ por B’.

Para responder à **2ª questão**, **e seguintes**, esperam-se algumas dificuldades, sobretudo na validação algébrica de conjeturas. Uma análise a partir de uma organização em tabela relativa às coordenadas dos afixos, pode simplificar este trabalho.

	$b = d$	$b \neq d$
$a = c$	$A(a,b); B(a,b); A'(-a,-b); B'(-a,-b)$	$A(a,b); B(a,d); A'(a,-b); B'(a,-d)$
$a \neq c$	$A(a,b); B(c,b); A'(a,-b); B'(c,-b)$	$A(a,b); B(c,d); A'(a,-b); B'(c,-d)$

Complexos Conjugados

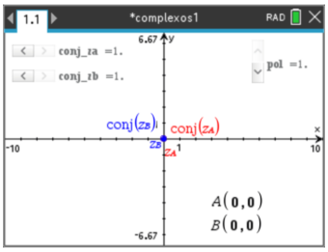
Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

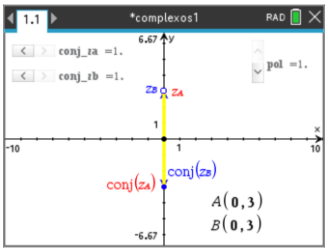
Vejamos a situação em que $\boldsymbol{a = c \wedge b = d}$:

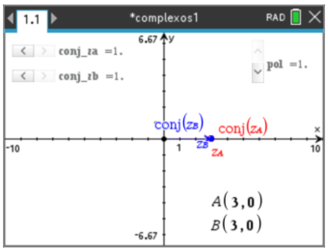
A manipulação da aplicação, rapidamente vai suscitar a necessidade de uma subdivisão deste caso, como o que é referido neste nova tabela:

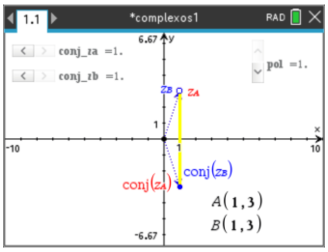
	$b = 0$	$b \neq 0$
$a = 0$	$A(0,0); B(0,0); A'(0,0); B'(0,0)$	$A(0,b); B(0,b); A'(0,-b); B'(0,-b)$
$a \neq 0$	$A(a,0); B(a,0); A'(a,0); B'(a,0)$	$A(a,b); B(a,b); A'(a,-b); B'(a,-b)$

Neste caso, basta que as partes imaginárias sejam nulas para que os quatro afixos coincidam, estando assim o polígono degenerado num ponto sobre o eixo real. Já no caso em que as partes imaginárias não são nulas, os afixos definem um segmento de reta paralelo ao eixo imaginário.



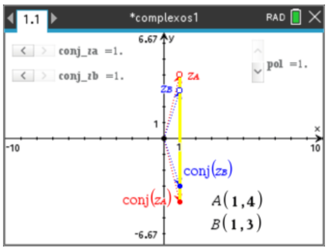


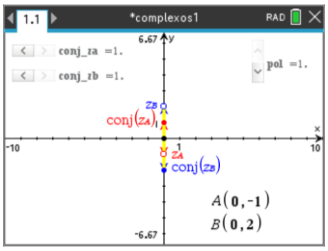




Analizemos agora a situação em que $\boldsymbol{a = c \wedge b \neq d}$**.**

Tendo os complexos a mesma parte real, e tendo em consideração que os respetivos conjugados também terão, esta situação vai originar sempre um segmento de reta paralelo ao eixo imaginário.

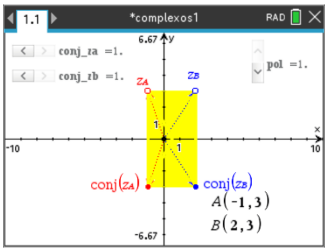




Já considerando as partes imaginárias iguais, com as partes reais diferentes ($\boldsymbol{a \neq c \wedge b = d}$ **)**, necessariamente teremos um retângulo. Note-se que os afixos dos números conmplexos estão no mesmo semiplano definido pelo eixo vertical.

Note-se ainda que $A(a,b); B(c,b); A'(a,-b)\ e\ B'(c,-b)$.

Deste modo,

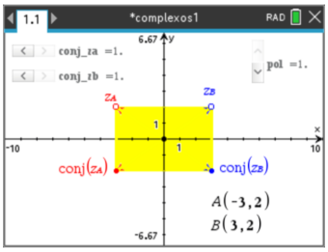


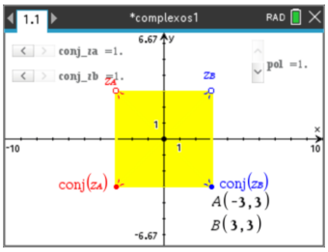
$\overrightarrow{AB} = (c-a,0)$, $\overrightarrow{AA'} = (0,-2b)$, $\overrightarrow{A'B'} = (c-a,0)$ e $\overrightarrow{BB'} = (0,-2b)$, donde se concluí que os lados opostos do polígono são paralelos e têm a mesma medida de comprimento e os vetores são paralelos e perpendiculares aos eixos, consecutivamente perpendiculares.

Complexos Conjugados

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

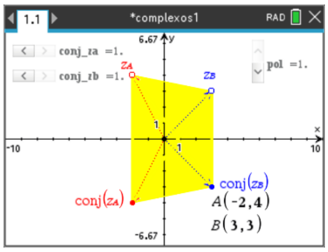
Note-se que, em particular, quando a e c forem simétricos e cujo módulo é igual ao módulo de b, o retângulo é um quadrado.



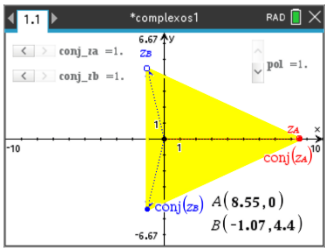


Tendo em consideração o trabalho algébrico anterior, tem-se que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2|a|$ e $\left\|\overrightarrow{AA'}\right\| = 2|b|$, o que permite confirmar a afirmação anterior.

Vejamos agora a situação em que $\boldsymbol{a \neq c \wedge b \neq d}$



Na manipulação feita com a aplicação, pode observar-se que em muitas situações o polígono convexo era um trapézio não retângulo. Ora, tal ocorre apenas nestas circunstâncias, mas nem sempre.

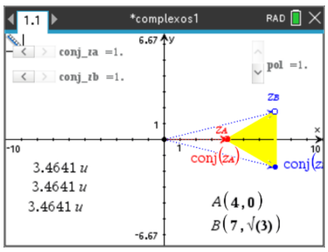


Note-se que há, neste caso, situações em que o quadrilátero fica degenerado num triângulo.

Basta que apenas um dos números complexos coincida com o seu conjugado, ou seja, quando apenas um dos números complexos seja um número real.

Sem perda de generalidade, considere-se que é z_A o número complexo real.

Ora, $A \equiv A'$, de coordenadas $(a, 0)$. Temos então três pontos, que definem naturalmente um triângulo. Podemos ainda dizer que este triângulo é isósceles, pois $\overrightarrow{AB} = (c - a, d)$ e $\overrightarrow{AB'} = (c - a, -d)$, vetores que têm a mesma norma, sendo $2|d|$ a medida do comprimento do lado do triângulo paralelo ao eixo imaginário.



Deste modo, o triângulo é equilátero se $\sqrt{(c-a)^2 + d^2} = 4d^2$, ou seja, $|c - a| = \sqrt{3}d$. Esta relação pode também ser obtida trabalhando apenas medidas num triângulo equilátero.

Da análise exaustiva, resultam as respostas às diferentes questões, incluindo a última, pois um losango não quadrado é algo que nunca irá ocorrer.