Limite de uma sucessão. Sucessão convergente.

1. Descrição

A tarefa permite estudar a noção de limite de uma sucessão e de sucessão convergente, partindo de uma exploração intuitiva até a uma exploração formal dos conceitos. A exploração é efetuada para sucessões cujos termos gerais se podem escrever na forma $a+\frac{b}{n}$ ou na forma $a+\frac{b(-1)^n}{n}$.

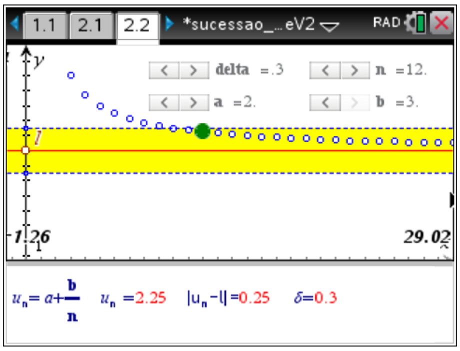
Ficheiros: sucessao_convergente.tns

2. Metas Curriculares

Sucessões 11 – SUC11

6.1. Identificar, dada uma sucessão (u_n), um número real ℓ como «limite da sucessão (u_n)» ou como «limite de u_n quando n tende para $+\infty$» quando, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - \ell| < \delta$, referir, nesta situação, que «u_n tende para ℓ» («$u_n \to \ell$»), e designar a sucessão (u_n) por «convergente» quando um tal limite ℓ existe e por «divergente» quando não for convergente.

3. Guia de utilização e de exploração



Os seletores a e b permitem alterar os parâmetros que definem a sucessão $u_n = a+\frac{b}{n}$. O valor do parâmetro a está associado à ordenada do ponto situado sobre o eixo das ordenadas, que define o número real ℓ.

O seletor n permite alterar o valor de n e obter o n-ésimo termo da sucessão (u_n). Quando $\ell - \delta < u_n < \ell + \delta$, o ponto do gráfico da sucessão (n, u_n) é destacado a verde.

Na parte inferior da janela, são apresentados os valores de u_n, $|u_n - l|$ e δ.

Exercício 1

Exercício 1.1

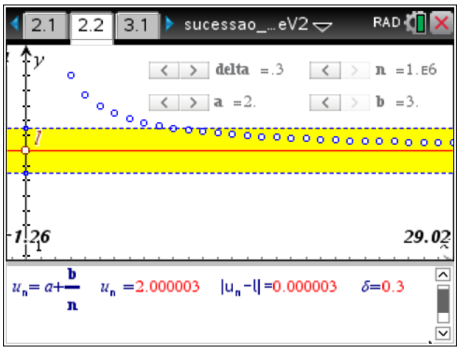
Pretende-se que ao completar a tabela seja percetível que os termos da sucessão tendem para 2.

n	u_n
100	2,03
1 000	2,003
10 000	2,0003
100 000	2,00003
1 000 000	2,000003

Exercício 1.2

$$u_n = 2 + \frac{3}{n}$$

Pode confirmar-se os valores obtidos da tabela da alínea 1.1., clicando no valor de n de modo a ficar editável e introduzir a ordem pretendida.



Exercício 1.3

Pretende-se conjeturar que os termos de (u_n) tendem para 2 que coincide com o valor do parâmetro a.

Exercício 1.4

Com este exercício inicia-se a conexão entre a noção intuitiva de limite e a noção formal, explorando os parâmetros envolvidos para uma situação concreta.

A partir da ordem 16, os termos da sucessão estão a uma distância de 2 inferior a 0.2.

Exercício 1.5

Exploram-se outros valores de δ.

δ	p
0,1	31
0,01	301
0,001	3001

Exercício 1.6

Pode-se conjeturar que, qualquer que seja o número real $\delta > 0$, *existe uma ordem* $p \in \mathbb{N}$, *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - \mathbf{2}| < \delta$.

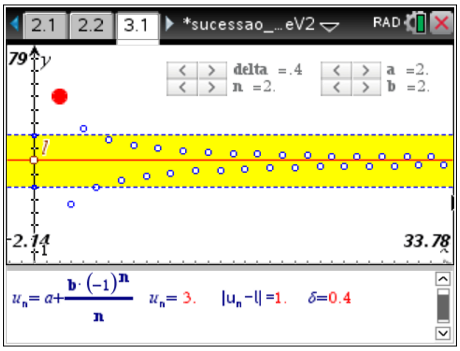
Exercício 1.7

$p = \left[\frac{3}{\delta}\right], \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$, qualquer que seja $\delta > 0$.

Exercício 2

Exercício 2.1

A solução deste exercício depende das sucessões definidas. Contudo, todas as sucessões na forma $u_n = a + \frac{b(-1)^n}{n}$ são convergentes para a.



Exercício 2.2

Pretende-se concluir que todas as sucessões da forma $u_n = a + \frac{b(-1)^n}{n}$ são convergentes para a.

Para $p = \left\lceil \frac{|b|}{\delta} \right\rceil$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$, qualquer que seja $\delta > 0$.