Limite de uma função num ponto segundo Heine

1. Descrição

Com esta tarefa, pretende estudar-se o limite de uma função num ponto segundo Heine, introduzindo-se os limites laterais a partir de sucessões de valores à esquerda ou à direita de um ponto a, convergentes para a.

Conclui-se a tarefa estendendo a aplicação da definição de limite ao caso de limites infinitos.

Ficheiros: limite_segundo_heine.tns

2. Metas Curriculares

Funções Reais de Variável Real 11 – FRVR11

1.2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x) \in \mathbb{R}$ quando x tende para a» quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por «$\lim_{x\to a} f(x) = b$», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

1.3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a» quando $b = \lim_{x\to a} f|_{]-\infty,a[}(x)$, representar b por $\lim_{x\to a^-} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à esquerda de a», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a» e estender esta definição ao caso de limites infinitos.

1.4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a» quando $b = \lim_{x\to a} f|_{]a,+\infty[}(x)$, representar b por $\lim_{x\to a^+} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à direita de a», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a» e estender esta definição ao caso de limites infinitos.

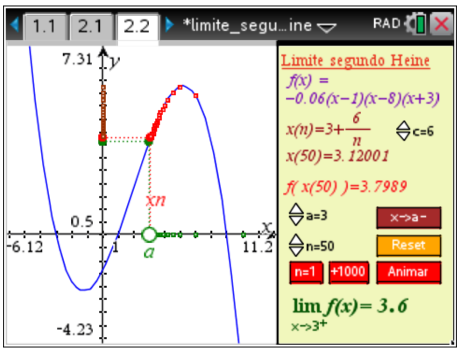
1.5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f, que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

1.6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

3. Guia de utilização e de exploração

FICHA 05 - Descritor (FRVR11-1.2 a 1.6)

Os seletores a e c permitem alterar os parâmetros que definem a sucessão $x_n = a + \frac{c}{n}$ de termos pertencentes ao domínio da função f. O valor do parâmetro a também poderá ser modificado arrastando com o rato o ponto de abcissa a, representado com uma bola aberta verde.

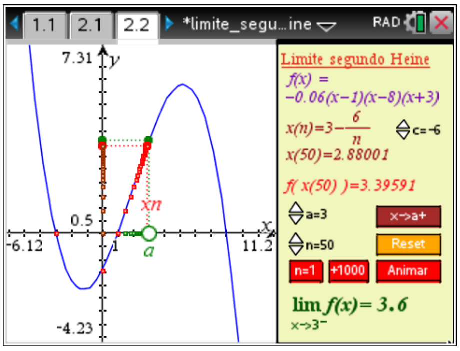


O seletor n permite alterar o valor de n e obter o n-ésimo termo da sucessão (x_n), a respetiva imagem pela função f e obter a representação gráfica dos primeiros n-ésimos termos da sucessão. O botão $n = 1$ representa apenas o primeiro termo da sucessão. O botão Animar incrementa automaticamente o valor n, permitindo criar uma animação do gráfico dos n primeiros termos da sucessão (x_n), das suas respetivas imagens pela função f e dos pontos da forma $(x_n, f(x_n))$.

O botão $x \to a^+$ ou $x \to a^-$, alterna o sinal de c de modo a termos uma sucessão (x_n) a tender para a por valores superiores ou inferiores a a, respetivamente.

Exercício 1

Exercício 1.1

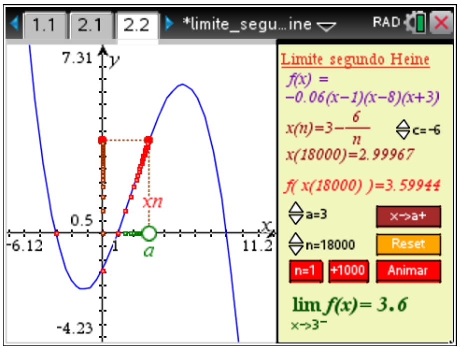


Ao alterar os valores de n, pretende-se constatar que todos os termos da sucessão (x_n) pertencem ao domínio da função f. Além disso, por observação gráfica e analítica, pode-se conjeturar para que valor tende x_n. A conjetura é confirmada pelo cálculo do limite da sucessão (x_n) que, neste caso, é 3.

Exercício 1.2

Pretende-se concluir que todos os termos da sucessão (x_n) são inferiores 3 e que 3 é o limite da sucessão.

Exercício 1.3



Considerando valores de n elevados pode-se conjeturar que a imagens dos termos da sucessão (x_n) tendem para 3.6.

Exercício 1.4

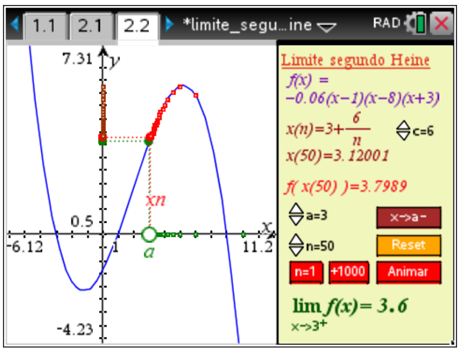
Verifica-se que, alterando o parâmetro $c < 0$, que continuamos a ter uma sucessão (x_n) convergente para 3 por valores inferiores a 3. Além disso, as imagens dos termos da nova sucessão (x_n) tendem também para 3.6. Deste modo, é de destacar que:

*Qualquer que seja a sucessão (x_n) de termos do domínio de f convergente para **3**, por valores **inferiores** a 3, a sucessão das imagens de (x_n) por f é convergente para **3,6**. Simbolicamente,*

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \mathbf{3,6}$$

Exercício 2

Exercício 2.1



Ao alterar os valores de n, pretende-se constatar que todos os termos da sucessão (x_n) pertencem ao domínio da função f. Além disso, por observação gráfica e analítica, pode-se conjeturar para que valores tende x_n. A conjetura é confirmada pelo cálculo do limite da sucessão (x_n) que, neste caso, é 3.

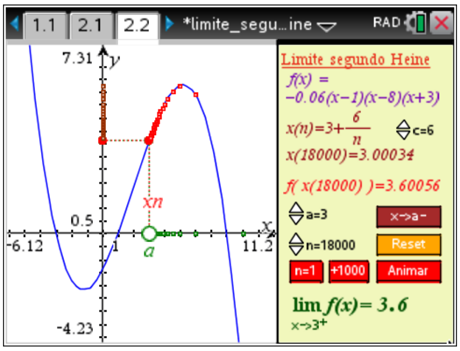
Autores: Jorge Santos e José Martins

Exercício 2.2

Pretende-se concluir que todos os termos da sucessão (x_n) são superiores 3 e que 3 é o limite da sucessão.

Exercício 2.3

Considerando valores de n elevados pode-se conjeturar que aimagens dos termos da sucessão (x_n) tendem para 3.6.



Exercício 2.4

Verifica-se que, alterando o parâmetro $c > 0$, que continuamos a ter uma sucessão (x_n) convergente para 3 por valores superiores a 3. Além disso, as imagens dos termos da nova ucessão (x_n) tendem também para 3.6. Deste modo, é de destacar que:

*Qualquer que seja a sucessão (x_n) de termos do domínio de f convergente para **3**, por valores **superiores** a 3, a sucessão das imagens de (x_n) por f é convergente para **3,6**. Simbolicamente,*

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \mathbf{3,6}$$

Exercício 3

Generalizando o estudo efetuados nos exercícios 1 e 2 pode definir-se os limites laterais.

- **Limite à esquerda de a:**

*$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ se e só se toda a sucessão (x_n) de termos do domínio de f convergente para **a**, por valores **inferiores** a a, a sucessão das imagens de (x_n) por f é **convergente** para b.*

- **Limite à direita de a:**

*$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ se e só se toda a sucessão (x_n) de termos do domínio de f convergente para **a**, por valores **superiores** a a, a sucessão das imagens de (x_n) por f é **convergente** para b.*

Exercício 4

$$f(3) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = 3{,}6$$

Exercício 5

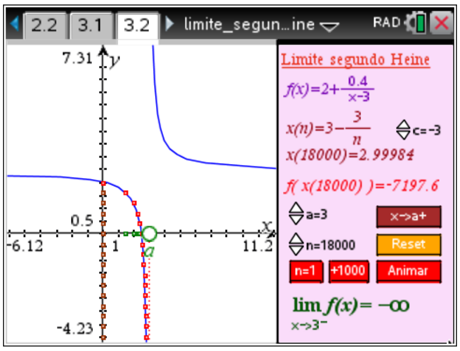
Dado que $3 \in D_f$ e os limites lateriais são ambos iguais a $f(3)$, tem-se que $\lim_{x\to 3} f(x) = 3{,}6$.

Exercício 6

Pretende-se com este exercício estender a aplicação da definição de limites laterais para o caso dos limites infinitos com $a \notin D_f$.

Autores: Jorge Santos e José Martins

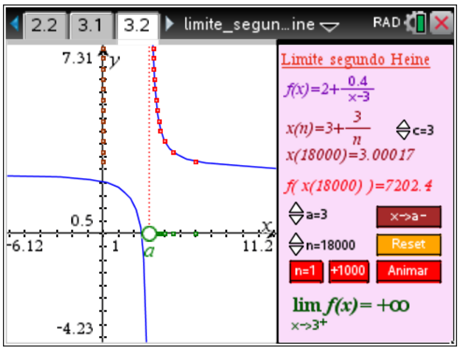
Exercício 6.1



Pretende concluir-se que x_n tende para 3 e as imagens de x_n tendem para $-\infty$. Pode, então, escrever-se que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

Exercício 6.2



Pretende concluir-se que x_n tende para 3 e as imagens de x_n tendem para $+\infty$. Pode, então, escrever-se que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

Exercício 6.3

Pelas alíneas anteriores pode concluir-se que não existe limite de f no ponto $x = 3$, pois os limites laterais nesse ponto são diferentes, ou seja, $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$.

Autores: Jorge Santos e José Martins